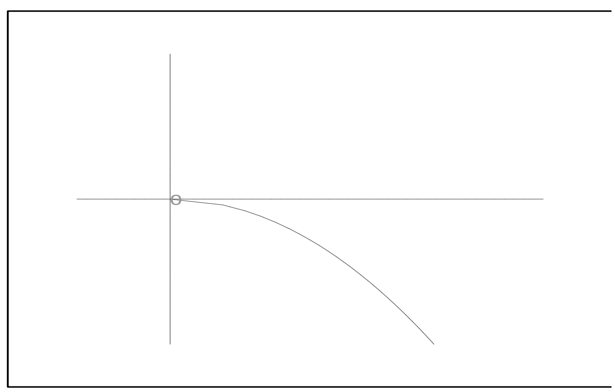
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2002

MAT 1408 $*$ PAUTA I_2

1. Sean $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^-$, $f(x) = -x^2$ y $g : \mathbb{R}^- \longrightarrow]-\infty, -2[$, $g(x) = x - 2$

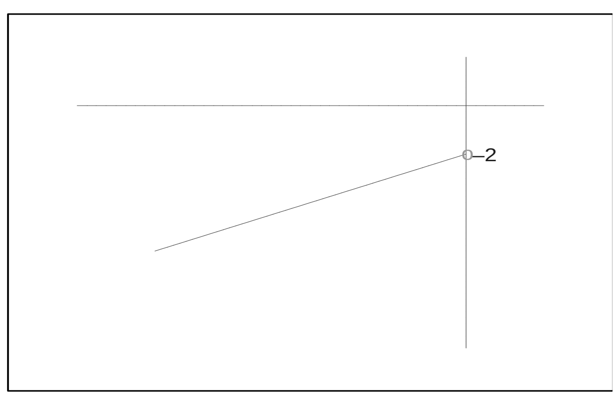
   (a) ¿f es 1-1 ?

   gráfico de f



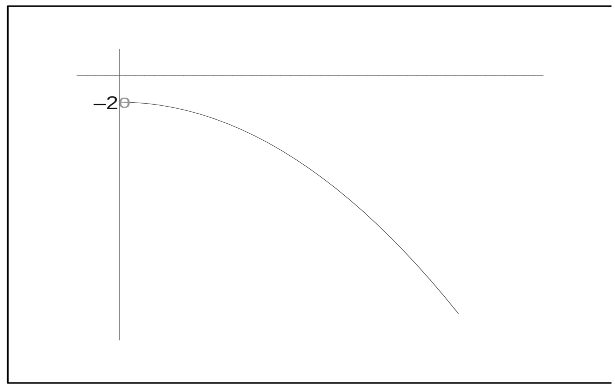
   Del gráfico es claro que f es inyectiva.

   gráfico de g



(b) Encuentre $g\,o\,f$, $Dom(g\,o\,f)$. Grafique $g\,o\,f$

gráfico de gof



Luego: $g\,o\,f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow]-\infty, -2[$ y tal que: $(g\,o\,f)(x) = -x^2 - 2$

(c) Justifique através del gráfico que $g\,o\,f$ es biyectiva

La inyectividad de es clara y como $Rec(gof) =]-\infty, -2[$ entonces es epiyectiva.

(d) Encuentre $(g\,o\,f)^{-1}$

$(g\,o\,f)^{-1} :]-\infty, -2[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ y tal que: $(g\,o\,f)^{-1}(x) = \sqrt{-x-2}$

(e) Si es posible, encuentre $f^{-1} o\, g^{-1}$

$f^{-1} : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ y tal que: $f^{-1}(x) = \sqrt{-x}$

$g^{-1} :]-\infty, -2[\longrightarrow \mathbb{R}^-$ y tal que: $g^{-1}(x) = x + 2$

$\Longrightarrow \quad f^{-1} o\, g^{-1}(x) = \sqrt{-x-2}$

(f) Compare las funciones de d) y e). ¿ Puede comentar algo?

$$(g\,o\,f)^{-1}(x) = (f^{-1} o\, g^{-1})(x)$$

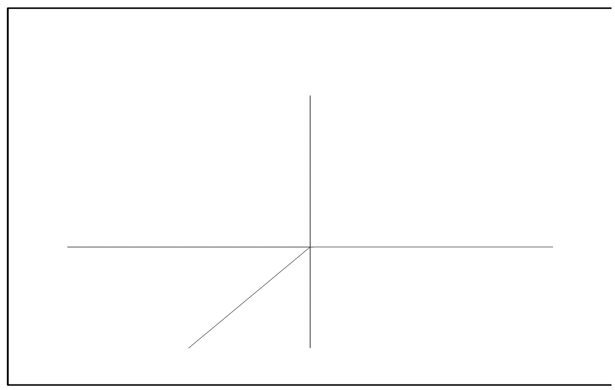
2. Si $f(x) = x - |x|$, $x \in \mathbb{R}$

(a) ¿f es Biyectiva? Justifique su respuesta.

No es inyectiva , ya que $f(2) = f(4) = 0$

(b) Grafique f y escríbala por partes.

gráfico de f

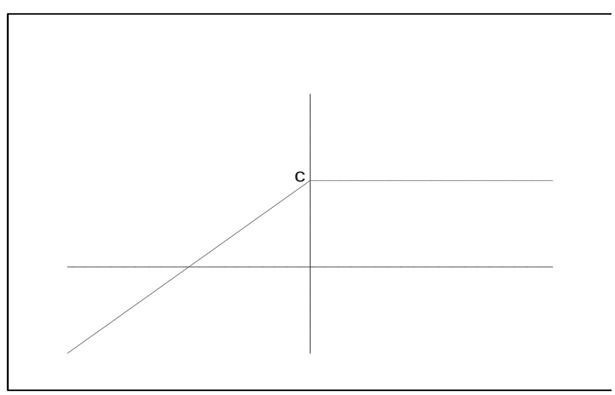


f por partes:

$$f(x) = x - |x| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(c) Grafique $h(x) = f(x) + c$, con $c > 0$

gráfico de h



(d) Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow B$, ¿Quién debe ser B para que h sea epiyectiva?

Basta que $B = \ Rec\, h =]-\infty, c\,[$

(e) Muestre que h no es 1-1.

h no es 1-1 ya que $h(a) = h(b) = c\,, \forall a, b \in \mathbb{R}^+$

3. Verdadero o Falso.

(a) Si $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$, entonces $Rec\, f = [-1, 1]$

Solución: Falso

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow Recf = \{1, -1\}$$

(b) R es una relación en $\mathbb{R}$ tal que: $xRy \iff y = (x-2)^2 + 2$ entonces $RecR = \mathbb{R}$

Solución: Falso

$$\begin{aligned} xRy &\iff y = (x-2)^2 + 2 \\ &\Longrightarrow y - 2 = (x-2)^2 \geq 0 \\ &\Longrightarrow y - 2 \geq 0 \\ &\Longrightarrow y \geq 2 \end{aligned}$$

así $Rec\, R = [2, \infty[$

(c) R relación en $\mathbb{R}$ tal que: $xRy \iff |x|+|y| \leq 1$ entonces $DomR = [-1, 1]$

Solución: Verdadero

$$\begin{aligned} xRy &\iff |x| + |y| \leq 1 \\ &\Longrightarrow |y| \leq 1 - |x| \,\wedge\, |y| \geq 0 \\ &\Longrightarrow 1 - |x| \geq 0 \\ &\Longrightarrow |x| \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

así $DomR = [-1, 1]$

4. Usando inducción, demuestre que:

$$2 + 10 + 24 + 44 + \cdots + (3n^2 - n) = n^2(n+1)$$

es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución:

sea $p(n) : 2 + 10 + 24 + 44 + \cdots + (3n^2 - n) = n^2(n+1)$

$$\begin{array}{ll} p(1): & 2 = 1^2(1+1) \\ & 2 = 2 \qquad \Longrightarrow p(1) \text{ es verdadero} \end{array}$$

Suponer $p(k)$ verdadero

$$p(k) : 2 + 10 + \cdots + (3k^2 - k) = k^2(k+1)$$

pd: $p(k+1) : 2 + 10 + \cdots + (3k^2 - k) + (3(k+1)^2 - (k+1)) = (k+1)^2(k+2)$

Demostración:
Considere

$$\underbrace{(2 + 10 + \cdots + (3k^2 - k))}_{\text{hip.Ind}} + \ (3(k+1)^2 - (k+1)) =$$

$$k^2(k+1) + 3(k+1)^2 - (k+1) =$$

$$(k+1)(k^2 + 3(k+1) - 1) =$$

$$(k+1)(k^2 + 3k + 2) =$$

$$(k+1)(k+1)(k+2) =$$

$$(k+1)^2(k+2)$$

así $p(k+1)$ es verdadero y $\forall n, p(n)$ se cumple.