Control 1 MA11A Algebra

Mayo 1996

P1.- (i)
(a) (1.5 ptos.) Sean p, q, r proposiciones. Construir la proposición compuesta "s" (en función de p, q, r) cuya tabla de verdad es:

p	**q**	**r**	**s**
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

(b) (1.5 ptos.) Probar que $s \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ es una tautología.

(ii) (3 ptos.) Sean A, B, C conjuntos. Probar que $A \subseteq C \;\Rightarrow\; A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$.

P2.-
(i) (3 ptos.) Probar que para todo natural mayor o igual que 1 se tiene $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$.

(ii) (a) (1.5 ptos.) Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos secuencias de números reales. Considere naturales p y n tales que $p \leq n$. Probar que:

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k)b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^{n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k).$$

(b) (1.5 ptos.) Sea H_k el k-ésimo número armónico, es decir $H_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$. Calcular $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{H_k}{k(k-1)}$.

P3.-
(i) (3 ptos.) Sean p, q reales no negativos tales que $p+q = 1$. Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$.

Indicación: notar que $k^2 = k(k-1) + k$.

(ii) (3 ptos.) Sea X un conjunto y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de X que satisface la propiedad siguiente:

$$\forall\, x \in X, \forall\, y \in X \setminus \{x\}, \exists\, i, j \in \mathbb{N}, (x \in A_i) \wedge (y \in A_j) \wedge (A_i \cap A_j = \phi).$$

Probar que $\displaystyle\bigcap_{i \in I(x)} A_i = \{x\}$, donde $I(x) = \{i \in \mathbb{N} \ / \ x \in A_i\}$.