PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2001

**PAUTA MAT 1408** $* I_1$

1. (a) Simplificar

$$\overline{p \Longrightarrow q} \Longrightarrow (\bar{p} \Longrightarrow \bar{q})$$

Demostraci'on:

i) $\overline{p \Longrightarrow q} \equiv \overline{\bar{p} \vee q} \equiv p \wedge \bar{q}$

ii) $\bar{p} \Longrightarrow \bar{q} \equiv p \vee \bar{q}$

ahora $i) \Longrightarrow ii)$ queda

$$\begin{aligned}(p \wedge \bar{q}) \Longrightarrow (p \vee \bar{q}) &\equiv \overline{p \wedge \bar{q}} \vee (p \vee \bar{q}) \\ &\equiv \bar{p} \vee q \vee p \vee \bar{q} \\ &\equiv (\bar{p} \vee p) \vee (q \vee \bar{q}) \\ &\equiv T \quad \text{donde } T \text{ es una Tautolog'ia.}\end{aligned}$$

(b) $a, b \in \mathbb{Z}, \quad a = k_1 b \wedge b = k_2 a$, entonces $\quad a = k_1(k_2 \cdot a) = k_1 \cdot k_2 a$
$\Longrightarrow k_1 \cdot k_2 = 1$

pero $\quad k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow k_1 = k_2 \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right.$ y en ese caso $\quad a = b \vee a = -b$

(c) si $\quad x \in \mathbb{R}^+$

$\sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

pero $\quad \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}} \qquad (x \neq 1)$

2. (a) La ecuaci'on

$$(*) \quad (m-5)x^2 - 4mx + (m-2) = 0$$

tiene dos soluciones diferentes en $\mathbb{R}$ si $\quad \triangle > 0$.

Para esto:

$$\begin{aligned}\triangle : 12m^2 + 28m - 40 > 0 \quad &\longleftrightarrow \quad 3m^2 + 7m - 10 > 0 \\ &\longleftrightarrow \quad 3(m-1) > (m + \tfrac{10}{3}) > 0\end{aligned}$$

$$\text{a) } m < -\frac{10}{3} \quad o \quad m > 1$$

Por otro lado, si $\quad x_1$ y $x_2 \quad$ son las ra'ices de (*) entonces:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m-2}{m-5}$$

y como $x_1$ y $x_2$ son de diferentes signo entonces $x_2 \cdot x_2 = \dfrac{m-2}{m-5} < 0 \longleftrightarrow$ b) $2 < m < 5$

de a) y b) se concluye $m \in \,]\,2, 5\,[$

3. Si

$$R)\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 1 \leq y^2\}$$

(a) $(x, y) \in R \longleftrightarrow x^2 \leq y^2 - 1$ pero $0 \leq x^2 \leq y^2 - 1 \quad \Longrightarrow y^2 - 1 \geq 0$

$\Longleftrightarrow y^2 \leq 1 \Longleftrightarrow \mid y \mid 1 \geq \Longleftrightarrow y \geq 1 \vee y \leq -1.$

(b) La proposici'on $\forall x \in \mathbb{R}, (x, x) \in R$ no es verdadera, ya que $x^2 + 1 \leq x^2$ es una contradicci'on.

(c)

$$\begin{aligned}
(x, \sqrt{5}) \in R \quad & \longleftrightarrow x^2 + 1 \leq 5 \\
& \longleftrightarrow x^2 \leq 4 \\
& \longleftrightarrow |x| \leq 2 \\
& \longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2
\end{aligned}$$

4. (a) Resolver $\mid x-5 \mid \geq x$

<u>caso 1</u> si $x$ es negativo o cero $(x \leq 0)$, entonces tenemos

$$\mid x-5 \mid \geq x$$

lo que siempre es verdadero es decir si $x \in \mathbb{R}_0^-$ la inecuaci'on se satisface.

o sea $S_1 = \mathbb{R}_0^-$

<u>caso 2</u> si $x > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mid x-5 \mid \geq x \quad &\Longleftrightarrow x-5 \geq x \vee x-5 \leq -x \\
&\Longleftrightarrow -5 \geq 0 \vee 2x \leq 5 \\
&\Longrightarrow 2x \leq 5 \\
&\Longrightarrow x \leq 5/2 \\
&\therefore S_2 = ]0,\ 5/2\,] \qquad (\text{no olvide } x > 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{y finalmente} \quad S_F &= \mathbb{R}_0 \bigcup ]0,\ 5/2\,] \\
&= ]-\infty, 5/2\,]
\end{aligned}$$

(b) Considere

$$2 - \frac{\sqrt{x^2+x^4}}{x} \geq 0 \longrightarrow 2 - \frac{\sqrt{x^2(1+x^2)}}{x} \geq 0 \longrightarrow 2 - \frac{\mid x \mid \sqrt{1+x^2}}{x} \geq 0$$

i) si $x > 0$ en ese caso tenemos

$$\begin{aligned}
2 - \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x} \geq 0 \quad &\longrightarrow 2 - \sqrt{1+x^2} \geq 0 \longrightarrow \sqrt{1+x^2} \leq 2 \\
\longrightarrow 1 + x^2 \leq 4 \quad &\longrightarrow \\
\longrightarrow x^2 \leq 3 \quad &\longrightarrow \\
\longrightarrow \mid x \mid \leq \sqrt{3} \quad &\longrightarrow \\
&\longrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Pero NO olvide $x > 0$ $.S_i = ]0, \sqrt{3}\,]$

ii) si $x \leq 0$, en ese caso se tiene

$$2 + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x} \geq 0 \Longrightarrow 2 + \sqrt{1+x^2} \geq 0$$

y $\forall x \in \mathbb{R}^-$, se satisface la inecuaci'on . $S_{ii} = \mathbb{R}^-$

luego:

$$S_1 = \mathbb{R}^- \cup ]0, \sqrt{3}\,]$$

Ahora hallar el conjunto soluci'on $S_2$

$$2 - \sqrt{1 + x^2} \geq 0 \quad \longrightarrow \sqrt{1 + x^2} \leq 2 \quad \longrightarrow 1 + x^2 \leq 4 \quad \mid x \mid \leq 3$$

$$\text{es decir} \quad -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$S_2 = [-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\,].$$

Es claro que: $S_1 \neq S_2$ y por tanto la proposici'on I: es Falsa. Adem'as $S_1 \cap S_2 \neq S_2$ ($S_2$ no est'a contenido en $S_1$). Luego II es falsa.

III: es Verdadero ya que

$$S_1 \cap S_2 = [\,-\sqrt{3},\ \sqrt{3}] - \{0\} \ \subseteq \ [-4, 4\,]$$