PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2001

PAUTA MAT 1408 $* I_2$

1. A) ver gr'aficos a parte.

   B) Sea $f(x) = (x- \mid x \mid)^2$, con $x \in \mathbb{R}$.

   i) Graficar f:

   si $x \geq 0 \Longrightarrow f(x) = 0$ luego el gr'afico es una semirecta con origen en el 0.

   Si $x < 0 \Longrightarrow f(x) = (2x)^2 = 4x^2$ y en ese caso el gr'afico es una rama de la par'abola $y = 4x^2$ (abierta hacia arriba)

   ii) $f(3) = 0 \wedge f(-3) = 4(-3)^2 = 4 \cdot 9 = 36$. Luego $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x$.

   iii) del gr'afico es claro que

$$Rec f = \mathbb{R}_0^+$$

2. (a) Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n^2$, esta funci'on es $1-1$ pero no es epiyectiva.

   (b) Si $f(x) = \dfrac{x+ \mid x \mid}{2} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

   $g(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ x^2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

   Hallar gof.

   en ese caso, si $x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

   es decir

$$(gof)(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \leq 2 \\ 2x & si \quad x > 2 \end{cases}$$

   Demostrar que f es Biyectiva. Si analizamos el gr'afico de f vemos que son dos semirectas de pendiente positiva, luego es claro que si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$ esto es; elementos diferentes del dominio tienen imagenes diferentes (f es estrictamente creciente).

   Adem'as, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

   Si $y > 4$, $\exists x = \dfrac{y}{2}$ tal que $f\left(\dfrac{y}{2}\right) = y$
   Si $y \leq 4, \exists x = y - 2$ tal que $f(y-2) = y$.

   Luego f es epiyectiva as'i, existe su inversa, f^{-1}.

   $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = \begin{cases} x/2 & x > 4 \\ x-2 & x \leq 4 \end{cases}$

4. Sea $F(n) : 9^n - 8n - 1$ es divisible por 64.
   Demostrar, usando inducci'on, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F(n)$ es verdadera.

   $F(1) : 9 - 8 - 1 = 0$ es divisible por 64 lo que es verdadero.

   Suponer $F(k)$ verdadero, por demostrar $F(k+1) : 9^{k+1} - 8(k+1) - 1$ es divisible por 64.

   dividiendo $9^{k+1} - 8(k+1) - 1$ por $9^k - 8k - 1$ se tiene:

$$9^{k+1} - 8(k+1) - 1 = 9(9^k - 8k - 1) + 64k$$

y por hip'otesis $9^k - 8k - 1$ es divisible por 64 lo mismo $64k$, luego el n'umero $9^{k+1} - 8(k+1) - 1$ es divisible por 64.

As'i $F(k+1)$ se cumple y por tanto $F(n)$, se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$