PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2001

PAUTA MAT 1408 $*$ I_3

1) Determine el valor de verdad de los siguientes enunciados, demostrando las que son verdaderas y deduciendo en el caso de una respuesta falsa, la respuesta verdadera correspondiente.

(a) El tercer t'ermino de $\left(x - \dfrac{1}{y}\right)^{15}$ es $105x^{13}\,y^{-2}$.

Resp.:

T_3 se produce para $k = 2$ se tiene:

$$T_3 = (-1)^2 \tbinom{15}{2} x^{13} \left(\tfrac{1}{y}\right)^2 = \frac{15!}{2!13!}\, x^{13}y^{-2} = \frac{15 \cdot 7}{2} x^{13}y^{-2} = 105x^{13}y^{-2}$$

Enunciado Verdadero

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = \frac{5^n - 1}{2}$

Resp.:

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1}$ (suma de t'erminos de una progresi'on geom'etrica)

$= 1 \cdot \dfrac{1 - (5^n)}{1 - 5} = \dfrac{5^n - 1}{4}$ (respuesta verdadera)

enunciado falso.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$

Resp.:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] =$$

$= 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ (respuesta verdadera)

enunciado falso

2) La suma de una progresi'on geom'etrica de raz'on 2 es 1533 y el 'ultimo t'ermino es 768. Calcule el valor de la sumatoria $\sum_{I=1}^{7} u_i$ donde u_i es el t'ermino de orden i de la progresi'on geom'etrica.

Resp.:

$S_n = 1533;\ r = 2;\ u_n = 768$. Necesitamos a y n.

Se tiene: $S_n = a \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r};\ \therefore\ 1533 = a\dfrac{1-2^n}{1-2}\ \therefore 1533 = a(2^n - 1)$ (I)

Por otra parte: $u_n = ar^{n-1};\ \therefore 768 = a \cdot 2^{n-1}$ (II)

Dividiendo (I) : (II) se tiene: $\dfrac{1533}{768} = \dfrac{511}{256} = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

$$\begin{aligned}
&\therefore 256 \cdot 2^n - 256 = 511 \cdot 2^{n-1} \\
&256 \cdot 2^n - 256 = \frac{511 \cdot 2^n}{2} \\
&512 \cdot 2^n - 512 = 511 \cdot 2^n \\
&2^n = 512 \therefore 2^n = 2^9 \therefore n = 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore 768 = a \cdot 2^8,\ \therefore a = \frac{768}{256}, \quad \therefore a = 3 \\
&\therefore \sum_{i=1}^{7} u_i = 5_7 = a \cdot \frac{1-r^7}{1-r} = 3\frac{1-2^7}{1-2} = \frac{3(1-128)}{1-2} = 3 \cdot 127 \\
&\therefore \sum_{i=1}^{7} u_1 = 381
\end{aligned}$$

3) En una progresi'on aritm'etica se sabe que $\sum_{i=1}^{5} a_i = 40$ y $\sum_{i=2}^{6} a_i = 75$. ¿Cu'ales son los 6 primeros t'erminos de esta progresi'on?

Resp.:

$\sum_{i=1}^{5} a_i = 40;\ \sum_{i=2}^{6} a_i = 75$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} a_i = S_5 &= \frac{5}{2}\left[2a + (5-1)d\right] \\
40 &= \frac{5}{2}[2a + 4d]
\end{aligned}$$

Por otra parte:$S_6 = a + \sum_{i=2}^{6} a_i$

$S_6 = a + 75$

Pero: $S_6 = 3[2a + 5d] \therefore a + 75 = 3\,[2a + 5d]$

$\therefore 6a + 15d = a + 75 \therefore 5a + 15d = 75$

$\therefore a + 3d = 15 \quad \text{(II)}$

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{r} a + 2d = 8 \\ a + 3d = 15 \end{array}\right|$ se tiene: $d = 7 \quad \therefore a = -6$

Luego los seis primeros t'erminos de 'esta progresi'on son:

$$-6, 1, 8, 15, 22, 29$$

4) Si la sucesi'on de n'umeros reales se define por $a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1}$ para $n \in N$, calcule a) $\sum_{i=1}^{4}(a_i + a_{i+1})$ y b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}$

(a) $a_1 = 1$; $a_n = n\,a_{n-1}$. se tiene:

$a_1 = 1$
$a_2 = 2a_1 = 2$
$a_3 = 3a_2 = 6$
$a_4 = 4a_3 = 24$
$a_5 = 5a_4 = 120$

$$\therefore \sum_{i=1}^{4}(a_i + a_{i+1} = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + (a_4 + a_5) =$$

$$= 3 + 8 + 30 + 144 = 185$$

(b)
$$\begin{aligned} a_k &= k\,a_{k-1} \\ &= k(k-1)a_{k-2} \\ &= k(k-1)(k-2)a_{k-3} \\ &= k! \cdot 1 = k! \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)!}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5) Calcular el valor de la suma: $2 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 11 + 6 \cdot 11 \cdot 15 + 8 \cdot 14 \cdot 19 \cdots$ hasta n t'erminos. Escriba la f'ormula en la forma $n(n+1)\,f(n)$, y determine la expresi'on $f(n)$.

Resp.:
$2 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 11 + 6 \cdot 11 \cdot 15 + 8 \cdot 14 \cdot 19 + \cdots + (2n)(3n+2)(4n+3)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k)(3k+2)(4k+3) = \sum_{k=1}^{n} [24k^3 + 34k^2 + 12k]$$

$$S_n = 24\sum_{k=1}^{n} k^3 + 34\sum_{k=1}^{n} k^2 + 12\sum_{k=1}^{n} k$$

$$S_n = 24\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 34\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 12\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = n(n+1)\left[6n(n+1) + \frac{17}{3}(2n+1) + 6\right]$$

$$S_n = n(n+1)\left[\frac{18n^2 + 18n + 34n + 17 + 18}{3}\right]$$

$$S_n = n(n+1)\frac{18n^2 + 52n + 35}{3}$$

$$\therefore\ f(n) = \frac{18n^2 + 52n + 35}{3}$$