NOTA: A continuación encontraréis los exámenes correspondientes al primer parcial de los años 1998, 1999 y 2000. Algunos problemas están relacionados con series numéricas que es un tema que no daremos este año, por tanto debéis olvidaros de ellos.

PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO. 22 de febrero 1999

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.), Plan 96

1.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & x > -y, \\ 2x & x = -y, \\ \dfrac{\ln(x^2-y^2+1)}{x+y} & x < -y. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(ii) Definimos $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = f(x,1)$. Analizar la derivabilidad de g en $\mathbb{R}$ y, en su caso, calcular g'.

(3 puntos)

2.- (a) Sea (y_n) una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{y_1}{1} + \dfrac{y_2}{2} + \cdots + \dfrac{y_n}{n}}{\ln(n)}.$$

(b)Una sucesión (x_n) es una progresión aritmética si existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{n+1} = d + x_n, \ n \geq 2.$$

(i) Probar que $x_n = x_1 + (n-1)d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) Probar que $x_1 + \cdots + x_n = n\dfrac{x_1 + x_n}{2}$.
(iii) Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\Big).$$

(2 puntos)

3.- Se considera la función $y(x) = \dfrac{1}{x}$. Demostrar que el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a $y(x)$ en el punto x es constante.

(2 puntos)

4.- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| - 2 & -4 \leq x \leq 0, \\ \text{máx}\{0, -x^2+4x-3\} & 0 < x \leq 4. \end{cases}$$

Calcular los extremos absolutos de f en $[-4,4]$.

(3 puntos)

ENTREGAR LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO. 19 de mayo 1999

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.), Plan 96

1.- Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $f : [-2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & -2 \leq x < 2, \\ \\ cx^3 + bx + 1 & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

(i) Encontrar los valores de a, b y c que hacen f continua y dos veces derivable en $(-2, 4)$.
(ii) Estudiar los extremos absolutos de f en $[-2, 4]$ para los valores de $a = -7/3$, $b = 2$ y $c = 1/6$.
(ii) Calcular $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ y estudiar su continuidad y derivabilidad para los valores de $a = 1$, $b = 2$ y $c = 4$.

(3 puntos)

2.- ¿En cuántos puntos se intersectan las curvas $y = ln(x)$ e $y = \frac{1}{9}x^2$? ¿ Por qué?

(2 puntos)

3.- Encontrar el triángulo isósceles de área máxima inscrito en la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ y cuyo eje de simetría es el eje y.

(3 puntos)

4.- Estudiar la convergencia de las siguientes series y en su caso calcular su suma:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{(n+4)(n+3)}} \qquad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n-1}}{4^{n+1}} \qquad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

(2 puntos)

ENTREGAR LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO. **5 de junio 1999**

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.), Plan 96

1.- Sea $f : [-3, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + 4x + 3) & -3 \leq x < 0, \\ 2x - 3 & 0 \leq x < 2 \\ e^{x-2} & 2 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f.
(ii) Calcular los extremos absolutos de f en $[-3, 6]$.
(iii) Dar la expresión de $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)dt$.
(iv) Calcular el área limitida por la gráfica de $f(x)$ desde $x = 3/2$ hasta $x = 6$.

(3 puntos)

2.- ¿En cuántos puntos se intersectan las curvas $y = e^x$ e $y = 3x^2$? ¿ Por qué?

(2 puntos)

3.- Encontrar el triángulo isósceles de área máxima inscrito en la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ y cuyo eje de simetría es el eje y.

(3 puntos)

4.- Estudiar la convergencia de las siguientes series y en su caso calcular su suma:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{(n+4)(n+3)}} \qquad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n-1}}{4^{n+1}} \qquad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

(2 puntos)

ENTREGAR LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

$1^{\underline{er}}$ **PARCIAL DE CÁLCULO. 2 de FEBRERO 1998**

Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques, Pla 96.

1.– Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -(3x+7) & \text{si } x < -2 \\ x^3 - 3x + 1 & \text{si } -2 \leq x \end{cases}.$$

Calcular los extremos absolutos de f en $[-3, 3]$.

2.– Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ la suma parcial n-ésima de la serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$.
(a) Probar que $S_n - S_{n-1} = a_n$.
(b) Usar la parte (a) para calcular el término n-ésimo de una serie cuya suma parcial n-ésima es

$$S_n = \frac{n}{2n+3}.$$

(c) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión hallada en (b), estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ y en caso de ser convergente hallar la suma.

3.– Encontrar el rectángulo de área máxima inscrito en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$.

4.– Sean $\alpha > 1$ y $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{\alpha}{x})$, $x > 0$.
(i) Demostrar que f posee un único punto fijo, es decir, existe un $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = x_0$, y calcularlo.
(ii) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida de forma recurrente por

$$x_{n+1} = f(x_n),\ x_0 = \alpha > 1.$$

Demostrar que:
(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente por $\sqrt{\alpha}$.
(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente.
(c) Estudiar la convergencia de la sucesión y probar que el límite es el punto fijo de la función f.

5.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y^3 - x)(e^{x-y} - 1)}{x^2 - y^2} & \text{si } x^2 - y^2 \neq 0 \\ \frac{x^2-1}{2} & \text{si } x^2 - y^2 = 0 \end{cases}.$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(ii) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x, 1)$. Estudiar la derivabilidad de g en $\mathbb{R}$ y en su caso calcular la función g'.

– Cada problema se calificará sobre 2 puntos.

– Entregar los problemas por separado.

1$^{\underline{er}}$ **PARCIAL DE CÁLCULO. 27 de MAYO 1998**

Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques, Pla 96.

1.– Calcular el número de ceros de la ecuación $\arctan g(x) = \dfrac{4}{5}x$, dando un intervalo donde se localicen.

2.– Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{ax+b}{x^2+2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(i) Hallar los valores de a, b para que f sea continua en $x = 0$ y tenga derivada nula en $x = 2$.
(ii) Estudiar la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.
(iii) Hallar los extremos absolutos de f en $[1, 4]$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado (i).

3.– Demostrar que las curvas $\dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$ se cortan ortogonalmente.

4.– (i) Estudiar la convergencia de las siguientes series, calculando su suma si es posible:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{3^n+4^n}{6^n}.$$

(ii) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \ln(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\tan(\frac{1}{n})}.$$

– Cada problema se calificará sobre 2.5 puntos.

– **Entregar los problemas por separado.**

$1^{\underline{er}}$ **PARCIAL DE CÁLCULO. 16 de JUNIO 1998**

Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques, Pla 96.

1.– Calcular el número de ceros de la ecuación $\arctan g(x) = \frac{4}{5}x$, dando un intervalo donde se localicen.

2.– Sea $f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ e^{x-1} - x & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $[-1, 2]$.
(ii) Hallar los extremos absolutos de f en $[-1, 2]$.

3.– Se considera un cuadrado de lado L. Encontrar el cuadrado de área máxima que puede circunscribirse en dicho cuadrado.

4.– (i) Estudiar la convergencia de las siguientes series, calculando su suma si es posible:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{3^n + 4^n}{6^n}.$$

(ii) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \ln(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n}) + 1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\tan(\frac{1}{n})}.$$

– Cada problema se calificará sobre 2.5 puntos.

– **Entregar los problemas por separado.**

PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO. 21 de febrero de 2000

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.)

1.- Calcular los siguientes límites:

$$(i)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)\sin(n)}{n}\quad (ii)\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+2^n}{5^n}\quad (iii)\lim_{n\to\infty}\frac{3/n}{\ln(\frac{n}{n-1})}\quad (iv)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

(2 puntos)

2.- Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{e^{xy}-1}{xy}(x^2+y^2)\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} & xy\neq 0,\\ (1+y^2)^{1/|y|} & x=0 \text{ e } y\neq 0,\\ (1+x^2)^{1/|x|} & y=0 \text{ y } x\neq 0,\\ 1 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(ii) Definimos $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ como $g(x)=\left(f(\frac{1}{\sqrt{2}}x,\frac{1}{\sqrt{2}}x)\right)^{|x|}$. Analizar la derivabilidad de g y, en su caso, calcular la ecuación de la recta tangente a g en el punto $x=0$.

(3 puntos)

3.- (i) Demostrar que la ecuación $x=n\ln(x)$ tiene a lo sumo dos raíces para todo $n\geq 1, x\geq 0$.
(ii) Demostrar que si $n=4$ la ecuación tiene exactamente dos raíces.

(2 puntos)

4.- Sea $f:[-4,4]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}3-(x+3)^2 & -4\leq x<-2,\\ |x| & -2\leq x\leq 1,\\ |x-2| & 1<x\leq 4,\end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $[-4,4]$.
(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de f en $[-4,4]$ y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto. ¿El teorema de Weiestrass da alguna información o ayuda en este estudio? (Justificar la respuesta).

(3 puntos)

ENTREGAR LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO

21 de febrero de 2000

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.), Plan 96

1.- Calcular los siguientes límites:

$$(i)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)\sin(n)}{n}\quad (ii)\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+2^n}{5^n}\quad (iii)\lim_{n\to\infty}\frac{3/n}{\ln(\frac{n}{n-1})}\quad (iv)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Solución:

$$(i)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)\sin(n)}{n}=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0\ \text{ escala de infinitos}\\ \sin(n)\ \text{ acotada}\end{array}\right]=0\times\text{acotada}=0.$$

$$(ii)\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+2^n}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n=[(\text{ número menor que uno })^\infty]=0+0=0.$$

$$(iii)\lim_{n\to\infty}\frac{3/n}{\ln(\frac{n}{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3/n}{\ln(1+\frac{1}{n-1})}=[\text{ infinitésimo del logaritmo }]=\lim_{n\to\infty}\frac{3/n}{\frac{1}{n-1}}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3(n-1)}{n}=3.$$

$$(iv)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\cdots$$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ y $b_n=n\sqrt{n}$. Como b_n es creciente y tiene límite infinito podemos aplicar este criterio.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}=[\times\text{ y }\div\text{ por el conjugado}]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{\left((n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}\right)\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+n\sqrt{n(n+1)}}{((n+1)^3-n^3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1+n\sqrt{n^2+n}}{3n^2+3n+1}=2/3.$$

2.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{e^{xy}-1}{xy}(x^2+y^2)\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} & xy \neq 0, \\ (1+y^2)^{1/|y|} & x = 0 \text{ e } y \neq 0, \\ (1+x^2)^{1/|x|} & y = 0 \text{ y } x \neq 0, \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(ii) Definimos $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = \left(f(\frac{1}{\sqrt{2}}x, \frac{1}{\sqrt{2}}x)\right)^{|x|}$. Analizar la derivabilidad de g y, en su caso, calcular la ecuación de la recta tangente a g en el punto $x = 0$.

Solución: (i) f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ por ser composición de funciones elementales. Falta examinar qué ocurre en puntos de las rectas: $x = 0$, es decir, $(0,a), a \in \mathbb{R}$ e $y = 0$, es decir, $(b,0), b \in \mathbb{R}$; y el límite en el punto $(0,0)$.

Para el cálculo de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} f(x,y), a \neq 0$ tenemos que distinguir dos regiones, ya que la función está definida a trozos.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,a) \\ x\neq 0}} \left(1 + \frac{e^{xy}-1}{xy}(x^2+y^2)\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} =^* (1+a^2)^{1/|a|}$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,a) \\ x=0}} (1+y^2)^{1/|y|} = (1+a^2)^{1/|a|}$$

Para $*$ utilizamos: el infinitésimo $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,a) \\ x\neq 0}} \frac{e^{xy}-1}{xy} = 1$ y, en ambos límites, que $a \neq 0$.

Por tanto, la función es continua en los puntos de la forma $(0,a), a \neq 0$. Calculamos ahora el $\lim\limits_{(x,y)\to(b,0)} f(x,y), b \neq 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(b,0) \\ y\neq 0}} \left(1 + \frac{e^{xy}-1}{xy}(x^2+y^2)\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} = (1+b^2)^{1/|b|}$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(b,0) \\ y=0}} (1+x^2)^{1/|x|} = (1+b^2)^{1/|b|}$$

Luego la función también es continua en estos puntos. Finalmente analizamos la continuidad de la función en el origen de coordenadas:

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \Big(1+\frac{e^{xy}-1}{xy}(x^2+y^2)\Big)^{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} = [1^\infty] =$$
  $$e^{\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(\frac{e^{xy}-1}{xy}(x^2+y^2)\Big)} =$$
  $$e^{\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{e^{xy}-1}{xy}\sqrt{x^2+y^2}} = [\text{ infinitésimo }] = e^0 = 1$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} (1+y^2)^{1/|y|} = [1^\infty] = e^{\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{y^2}{|y|}} = e^{\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} y\frac{y}{|y|}} = e^0 = 1$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} (1+x^2)^{1/|x|} = [1^\infty] = e^{\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{|x|}} = e^{\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} x\frac{x}{|x|}} = e^0 = 1$$

Así pues la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

(ii) La función g está definida como

$$g(x) = \Big(f(\frac{1}{\sqrt{2}}x, \frac{1}{\sqrt{2}}x)\Big)^{|x|} = \begin{cases} \Big(2e^{x^2/2}-1\Big) & x\neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Puesto que f es continua en $\mathbb{R}^2$, su restricción g es continua en $\mathbb{R}$. Además, g es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ por ser composición de funciones elementales que son derivables. Sólo falta por analizar qué ocurre con $x=0$. Procedemos mediante la definición de derivada:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2/2}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2/2}-1}{x^2/2}x = 0.$$

Por tanto g es derivable en $x=0$ y $g'(0)=0$.

La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es $y-g(0) = g'(0)(x-0) \Longrightarrow y = 1$.

3.- (i) Demostrar que la ecuación $x = n\ln(x)$ tiene a lo sumo dos raíces para todo $n \geq 1, x > 0$.

(ii) Demostrar que si $n = 4$ la ecuación tiene exactamente dos raíces.

(2 puntos)

Solución: (i) Para demostrar que la ecuación $x = n\ln(x)$ tiene a lo sumo dos raíces para todo $n \geq 1, x > 0$, basta aplicar el Teorema de Rolle. Para ello definimos en primer lugar la función $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f_n(x) = x - n\ln(x).$$

Esta función es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$ (teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^+$ no contiene el cero), ya que es composición de funciones elementales. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Rolle. Calculamos f_n' y estudiamos sus ceros:

$$f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = 0 \iff x = n.$$

Como f_n' sólo se anula una vez, obtenemos que f_n se anulará a lo sumo dos veces.

(ii) Si $n = 4$, la función que consideramos es $f(x) = x - 4\ln x$. Por el apartado anterior sabemos que se anula a lo sumo en dos puntos. Para demostrar que lo hace exactamente en dos puntos basta que apliquemos el Teorema de Bolzano para encontrar dos intervalos donde la función cambie de signo en los extremos.

Probamos con $[1, e]$,

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 > 0 \\ f(e) &= e - 4 < 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \text{existe } x_0 \in (1, e) \text{ tal que } f(x_0) = 0.$$

Ahora en $[e, e^3]$,

$$\begin{aligned} f(e) &= e - 4 < 0 \\ f(e^3) &= e^3 - 12 > 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \text{existe } x_1 \in (e, e^3) \text{ tal que } f(x_1) = 0.$$

4.- Sea $f : [-4, 4] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - (x+3)^2 & -4 \leq x < -2, \\ |x| & -2 \leq x \leq 1, \\ |x-2| & 1 < x \leq 4, \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $[-4, 4]$.
(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de f en $[-4, 4]$ y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto. ¿El teorema de Weiestrass da alguna información o ayuda en este estudio? (Justificar la respuesta).

Solución: (i) En primer lugar analizamos como es la función $f(x)$ examinando los valores absolutos que aparecen:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - (x+3)^2 & -4 \leq x < -2, \\ -x & -2 \leq x \leq 0, \\ x & 0 < x \leq 1, \\ -(x-2) & 1 < x \leq 2, \\ (x-2) & 2 < x \leq 4, \end{cases}$$

La gráfica de f es:

Estudiamos la continuidad de la función f en los puntos donde cambia de definición:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} 3 - (x+3)^2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} -x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2 - x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} 2 - x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, f es continua en $[-4, 4]$, que es compacto. Luego:

(ii) Por el teorema de Weiestrass f alcanza extremos absolutos en $[-4,4]$ que se hallarán entre los siguientes puntos:
(a) Puntos frontera del intervalo, -4 y 4.
(b) Puntos de no derivabilidad. Deben hallarse entre los puntos donde la función cambia de definición. Para calcularlos hallamos f' y los límites laterales en los cambios de definición:

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+3) & -4 < x < -2, \\ -1 & -2 < x < 0, \\ 1 & 0 < x < 1, \\ -1 & 1 < x < 2, \\ 1 & 2 < x < 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to -2^-} -2(x+3) = 2 \\ \lim_{x\to -2^+} -1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} -1 = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} 1 = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} -1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} -1 = -1 \\ \lim_{x\to 2^+} 1 = 1 \end{cases}$$

Por tanto, f no es derivable en $x = -2, 0, 1, 2$.
(c) Puntos estacionarios, es decir, $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} &\text{en } (-4,-2) \ f'(x) = -2(x+3) = 0 \Longrightarrow x = -3 \\ &\text{en } (-2,0) \ f'(x) = -1 < 0 \text{ luego no existen} \\ &\text{en } (0,1) \ f'(x) = 1 > 0, \text{ luego no existen} \\ &\text{en } (1,2) \ f'(x) = -1 < 0, \text{ luego no existen} \\ &\text{en } (2,4) \ f'(x) = 1 > 0, \text{ luego no existen} \end{aligned}$$

El signo de la derivada nos ayuda a clasificar los extremos locales o relativos de la función, dado que ésta es continua:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ -4 & & -3 & & -2 & & 0 & & 1 & & 2 & & 4 \end{array}$$

Del esquema anterior podemos decucir que f presenta un mínimo local en los puntos, $x = -4, 0, 2$ y un máximo local en los puntos $x = -3, 1, 4$.

Finalmente para obtener los extremos absolutos basta calcular los valores de la función en cada uno de los puntos obtenidos:

x	$f(x)$	
-4	2	
4	2	
-2	2	
0	0	Mínimo absoluto
1	1	
2	0	Mínimo absoluto
-3	3	Máximo absoluto

SEGUNDO PARCIAL DE CÁLCULO. 1 de junio de 2000

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.)

1.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3(x^2+1) & y \geq 0 \\ \sin(x^2+y^2) & y < 0. \end{cases}$$

(i) Calcular $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$.
(ii) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.
(iii) Dar la expresión del plano tangente a la superficie $S \equiv x + y + f(x,y) + z^2 = 1$ en el punto $(0,0,-1)$.
(iv) Sea $\alpha(t) = (t+1, (t+1)^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Calcular la variación de f a lo largo de la curva α en el punto $(1,1)$.

(4 puntos)

2.- Sea $f : [-1, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x < 0, \\ \sin x & 0 \leq x < \pi, \\ (x-\pi)^3 & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

(i) Calcular el área encerrada bajo la gráfica de f desde $x = -1$ hasta $x = 2\pi$.
(ii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre -1 y π alrededor del eje OX.

(3 puntos)

3.- Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = xy$ en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x+2,\ y^2 \leq 2x+4,\ x^2+y^2 \leq 4\}.$$

(3 puntos)

ENTREGAR LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

FINAL DE CÁLCULO. 1 de junio de 2000

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.)

1.- Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} n\tan(\frac{1}{n}+1) \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n)}{n}$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} n(1-\cos(\tfrac{1}{n})) \quad (iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

(2 puntos)

2.- Sea $f : [-1, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x < 0, \\ \sin x & 0 \le x < \pi, \\ (x-\pi)^3 & \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $[-1, 2\pi]$.
(ii) Calcular el área encerrada bajo la gráfica de f desde $x = -1$ hasta $x = 2\pi$.
(iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre -1 y π alrededor del eje OX.

(4 puntos)

3.- Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = xy$ en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x + 2,\ y^2 \le 2x + 4,\ x^2 + y^2 \le 4\}.$$

(4 puntos)

ENTREGAR LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO. 17 de mayo de 2000

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.)

1.- Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sin(n)}{n} \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

(3 puntos)

2.- Demostrar que la ecuación $x = \tan(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$.

(3 puntos)

3.- Sea $f : [-4,5] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2+4 & -4 \le x < -2, \\ |x| & -2 \le x < 2, \\ 2 & 2 \le x < 4, \\ (x-4)^2+2 & 4 \le x \le 5. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $[-4,5]$.
(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de f en $[-4,5]$ y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto. ¿El teorema de Weiestrass da alguna información o ayuda en este estudio? (Justificar la respuesta).

(4 puntos)

ENTREGAR LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

SEGUNDO PARCIAL DE CÁLCULO. 17 de mayo de 2000

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.)

1.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-(x^2+y^2) & xy < 0, \\ e^{x^2+y^2} + xy & xy \geq 0. \end{cases}$$

(i) Calcular $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$.
(ii) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.
(iii) Dar la expresión del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(0,0,f(0,0))$.
(iv) Demostrar que la superficie del apartado anterior y la superficie $x^2+x+y^2+y+z^2-2z=0$ se cortan en el punto $(0,0,1)$ formando un ángulo recto.
(v) Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ con $x(u,v) = u^2+v^2$ y $y(u,v) = u+v$. Demostrar que $f \circ g$ es diferenciable en $(0,0)$ y calcular $d(f \circ g)(0,0)$.

(4 puntos)

2.- Se consideran las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2$. Se define

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,\pi] \\ g(x) & \text{si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

(i) Hallar la función integral de $h(x)$, $H(x) = \int_0^x h(t)dt$.
(ii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre 0 y π alrededor del eje OX.
(iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre 0 y π alrededor del eje OY.

(3 puntos)

3.- Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, y^2 \leq x+4\}.$$

(3 puntos)

ENTREGAR LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

FINAL DE CÁLCULO. 17 de mayo de 2000

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.)

1.- Calcular los siguientes límites:

$$(i) \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sin(n)}{n} \quad (ii) \lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) \quad (iii) \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

(2.5 puntos)

2.- Sea $f : [-4,5] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2+4 & -4 \leq x < -2, \\ |x| & -2 \leq x < 2, \\ 2 & 2 \leq x < 4, \\ (x-4)^2+2 & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $[-4,5]$.

(2.5 puntos)

3.- Se consideran las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2$. Se define

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,\pi] \\ g(x) & \text{si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

(i) Hallar la función integral de $h(x)$, $H(x) = \int_0^x h(t)dt$.
(ii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre 0 y π alrededor del eje OY.

(2.5 puntos)

4.- Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, y^2 \leq x+4\}.$$

(2.5 puntos)

ENTREGAR LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE CÁLCULO

17 de mayo de 2000

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.), Plan 96

P1-[1] y F-[1] .- Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sin(n)}{n} \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sin(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n}\sin(n)) = \left[\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 & \\ \sin(n) \quad \text{acotada} & \end{array}\right] = 1+0\times\text{acotada} = 1.$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = [(\text{ infinitésimos equivalentes })] = 1.$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \cdots$$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ y $b_n = n\sqrt{n}$. Como b_n es creciente y tiene límite infinito podemos aplicar este criterio.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = [\times \text{ y } \div \text{ por el conjugado}] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{\left((n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}\right)\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+n\sqrt{n(n+1)}}{((n+1)^3-n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1+n\sqrt{n^2+n}}{3n^2+3n+1} = 2/3.$$

P1-[2] .- Demostrar que la ecuación $x = \tan(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$.

Solución: (i) Para demostrar que la ecuación $x = \tan(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$, basta aplicar el Teorema de Rolle y de Bolzano. Para ello definimos en primer lugar la función $f : [-\pi/4, \pi/4] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = x - \tan(x).$$

Esta función es continua y derivable en $[-\pi/4, \pi/4]$, ya que es composición de funciones elementales. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Rolle. Calculamos f' y estudiamos su signo y sus ceros:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \ (f' = 0 \iff x = 0) \text{ y } f' < 0.$$

Como f' sólo se anula una vez, obtenemos que f se anulará a lo sumo dos veces. Pero al ser f estrictamente decreciente y anularse en $x = 0$, sólo hay un cero de f, $x = 0$. Obsérvese que no hemos aplicado el Teorema de Bolzano.

P1-[3] .- Sea $f : [-4, 5] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & -4 \leq x < -2, \\ |x| & -2 \leq x < 2, \\ 2 & 2 \leq x < 4, \\ (x-4)^2 + 2 & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $[-4, 5]$.
(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de f en $[-4, 5]$ y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto. ¿El teorema de Weiestrass da alguna información o ayuda en este estudio? (Justificar la respuesta).

F-[2] .- Sea $f : [-4, 5] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & -4 \leq x < -2, \\ |x| & -2 \leq x < 2, \\ 2 & 2 \leq x < 4, \\ (x-4)^2 + 2 & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $[-4, 5]$.

Solución: (i) En primer lugar analizamos como es la función $f(x)$ examinando los valores absolutos que aparecen:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & -4 \leq x < -2, \\ -x & -2 \leq x < 0, \\ x & 0 \leq x < 2, \\ 2 & 2 \leq x < 4, \\ (x-4)^2 + 2 & 4 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

La gráfica de f es:

Estudiamos la continuidad de la función f en los puntos donde cambia de definición, ya que en el resto del dominio es suma y producto de funciones elementales:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} -2(x+3)^2+4=2 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} -x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} -x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} x=2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} 2=2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} (x-4)^2+2=2 \end{cases}$$

Por tanto, f es continua en $[-4,5]$, que es compacto. Luego: (Nota: los estudiantes que realizaron el examen final no necesitan hallar los extremos, pero si debéis estudiar la derivabilidad cosa que hacemos a continuación.)

(ii) Por el teorema de Weiestrass f alcanza extremos absolutos en $[-4,5]$ que se hallarán entre los siguientes puntos:
(a) Puntos frontera del intervalo, -4 y 5.
(b) Puntos de no derivabilidad. Deben hallarse entre los puntos donde la función cambia de definición. Para calcularlos hallamos f' y los límites laterales en los cambios de definición:

$$f'(x) = \begin{cases} -4(x+3) & -4 < x < -2, \\ -1 & -2 < x < 0, \\ 1 & 0 < x < 2, \\ 0 & 2 < x < 4, \\ 2(x-4) & 4 < x < 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} -4(x+3)=-4 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} -1=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} -1=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} 2(x-4)=0 \end{cases}$$

Por tanto, f no es derivable en $x=-2,0,2$.

(c) Puntos estacionarios, es decir, $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\text{en } (-4,-2)\ f'(x) = -4(x+3) = 0 \Longrightarrow x = -3 \\
&\text{en } (-2,0)\ f'(x) = -1 < 0 \text{ luego no existen} \\
&\text{en } (0,2)\ f'(x) = 1 > 0, \text{ luego no existen} \\
&\text{en } (2,4)\ f'(x) = 0, \text{ luego son todos los puntos de este intervalo} \\
&\text{en } (4,5)\ f'(x) = 2(x-4) = 0 \Longrightarrow x = 4
\end{aligned}$$

El signo de la derivada nos ayuda a clasificar los extremos locales o relativos de la función, dado que ésta es continua:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow & & 0 & & \nearrow & \\
-4 & & -3 & & -2 & & 0 & & 2 & & 4 & & 5
\end{array}$$

Del esquema anterior podemos decucir que f presenta un mínimo local en los puntos, $x = -4, 0, 4$ y un máximo local en los puntos $x = -3, 2, 5$.

Finalmente para obtener los extremos absolutos basta calcular los valores de la función en cada uno de los puntos obtenidos:

x	$f(x)$	
-4	2	
5	3	
-3	4	Máximo absoluto
-2	2	
0	0	Mínimo absoluto
2	2	
$(2,4)$	2	
4	2	

P2-[1] .- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-(x^2+y^2) & xy<0, \\ e^{x^2+y^2}+xy & xy \geq 0. \end{cases}$$

(i) Calcular $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$.
(ii) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.
(iii) Dar la expresión del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(0,0,f(0,0))$.
(iv) Demostrar que la superficie del apartado anterior y la superficie $x^2+x+y^2+y+z^2-2z=-1$ se cortan en el punto $(0,0,1)$ formando un ángulo recto.
(v) Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ con $x(u,v) = u^2+v^2$ y $y(u,v) = u+v$. Demostrar que $f \circ g$ es diferenciable en $(0,0)$ y calcular $d(f\circ g)(0,0)$.

Solución: (i) Como la función está definida de forma diferente en un entorno de $(0,0)$, para calcular las derivadas parciales debemos proceder mediante su definición:

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h^2} h = 1\times 0 = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h^2} h = 1\times 0 = 0$$

Hemos utilizado el infinitésimo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

(ii) Si f es diferenciable en $(0,0)$, entonces $df(0,0) = (0\,0)$ (candidato a diferencial). Para demostrar que efectivamente f es diferenciable debemos calcular el siguiente límite y comprobar que da cero:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-df(0,0)\binom{0}{0}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

El valor del límite anterior depende de si nos acercamos a $(0,0)$ por puntos tales que $hk<0$ o $hk\geq 0$, por tanto debemos realizar límites según subconjuntos.

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk<0}} \frac{f(h,k)-f(0,0)-df(0,0)\binom{0}{0}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk<0}} \frac{1-(h^2+k^2)-1}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk<0}} -\sqrt{h^2+k^2} = 0$$
$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\geq 0}} \frac{f(h,k)-f(0,0)-df(0,0)\binom{0}{0}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\geq 0}} \frac{e^{h^2+k^2}+hk-1}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\geq 0}} \frac{e^{h^2+k^2}-1}{h^2+k^2}\sqrt{h^2+k^2} + h\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = [\text{ infinitésimos equivalentes } +0\times \text{acotada}] = 0$$

(iii) Al tratarse de una superficie dada de forma explícita $z = f(x, y)$ la ecuación del plano tangente en el punto $(a, b, f(a, b))$ es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 1 \\ z-f(a,b) & D_1f(a,b) & D_2f(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = z - 1$$

Luego el plano tangente a nuestra superficie en el punto $(0, 0, 1)$ es $z = 1$.

(iv) Para demostrar que la superficie del apartado anterior y la superficie $x^2 + x + y^2 + y + z^2 - 2z = -1$ se cortan en el punto $(0, 0, 1)$ formando un ángulo recto. Basta comprobar que ambas superficies pasan por el punto y que los vectores normales son ortogonales. Recordar que el vector normal a una superficie de nivel en un punto (a, b, c) es $\nabla f(a, b, c)$.

En nuestro caso tenemos las superficies $g_1(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ y $g_2(x, y, z) = x^2 + x + y^2 + y + z^2 - 2z + 1 = 0$.

(a) $f(0, 0) - 1 = 0$ y $g(0, 0, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 1 - 2 + 1 = 0$. Luego se cortan.

(b) $\nabla f_1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)^t$ y $\nabla g_2(0, 0, 1) = (1, 1, -1)^t$.

Comprobemos para finalizar que los vectores son ortogonales

$$\langle \nabla f_1(0, 0, 1), \nabla g_2(0, 0, 1)\rangle = \langle (0, 0, 1)^t, (1, 1, 0)^t\rangle = 0.$$

(v) Para demostrar que $f \circ g$ es diferenciable en $(0, 0)$ podemos utilizar la regla de la cadena, dado que ya tenemos estudiada la diferenciabilidad de f en $(0, 0) = g(0, 0)$ y que la función g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por estar definida como un polinomio de grado dos y otra de grado uno en varias variables. Por tanto, aplicando la regla de la cadena obtenemos que $f \circ g$ es diferenciable en $(0, 0)$. Además, $d(f \circ g)(0, 0) = \nabla f(0, 0)dg(0, 0) = (0, 0)^t$, ya que $\nabla f(0, 0) = (0, 0)^t$

F-[3] .- Se consideran las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2$. Se define

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ g(x) & \text{si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

(i) Hallar la función integral de $h(x)$, $H(x) = \int_0^x h(t)dt$.
(ii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre 0 y π alrededor del eje OY.

P2-[2] .- Se consideran las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2$. Se define

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ g(x) & \text{si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

(i) Hallar la función integral de $h(x)$, $H(x) = \int_0^x h(t)dt$.
(ii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre 0 y π alrededor del eje OX.
(iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre 0 y π alrededor del eje OY.

Solución: (i) Como la función h está definida a trozos su función integral H también lo estará. Por tanto, debemos distinguir $x \in [0, \pi]$ y $x \in [\pi, 2\pi]$.

- $x \in [0, \pi]$ $\quad H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)dt = \int_0^x \sin t dt = -\cos t|_0^\pi = 1 - \cos x$
- $x \in [\pi, 2\pi]$ $\quad H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)dt = \int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^x t^2 dt = 2 + \left.\frac{t^3}{3}\right|_\pi^x = 2 + \frac{x^3 - \pi^3}{3}$

(ii) (Sólo para los estudiantes que realizaron el segundo parcial). La fórmula del volumen de un sólido de revolución alrededor del eje x generado por la función f desde $x = a$ hasta $x = b$ es $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. En nuestro caso

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right)_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

(iii) La fórmula del volumen del sólido generado al girar la función $f(x)$ entre a y b alrededor del eje OY es $V = 2\pi \int_a^b x f(x)dx$. En nuestro caso:

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x \, dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ v'dx = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\, x\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx =$$
$$-\pi + \sin x|_0^\pi = \pi$$

P2-[3] y F-[4] .- Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y^2 \leq x + 4\}.$$

Solución: En primer lugar representamos el conjunto A. Para ello hallamos las intersecciones entre las dos curvas que lo definen

$$\left\{\begin{array}{l} (x+3)^2 + y^2 = 16 \\ \\ y^2 = 2x + 14 \end{array}\right. \Longrightarrow (x+3)^2 + 2x + 14 = 16 \Longrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \Longrightarrow x = \left\{\begin{array}{l} -1 \\ -7 \end{array}\right.$$

Luego las curvas se intersecan en los puntos $(-1, \pm 2\sqrt{3}), (-7, 0)$.

La curva $(x+3)^2 + y^2 = 16$ es una circunferencia de radio 4 y centro $(-3,0)$ y la curva $y^2 = 2x + 14$ es una parábola con vértice en $(-7,0)$. Por tanto, el conjunto A es:

Nótese que f es una función continua (es una función polinómica) y A es un conjunto compacto. Por tanto el Teorema de Weierstrass asegura la existencia de extremos absolutos, que se encontrarán entre los puntos siguientes:

(i) Vértices del conjunto A: $(-1, \pm 2\sqrt{3}), (-7, 0)$

(ii) Extremos libre de f en el interior de A:

Como estamos bajo hipótesis de diferenciabilidad podemos aplicar la condición necesaria de extremo libre

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(x+1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array} \Longrightarrow$$

$$(-1, 0) \in \mathring{A}$$

(iii) Extremos condicionados en las distintas fronteras.

(iii.1) Frontera descrita por la curva $x = y^2/2 - 7$. Como la función x es explícita podemos sustituir en la función.

$$h(y) = f(x = y^2/2 - 7, y) = (y^2/2 - 6)^2 + y^2 \Longrightarrow h'(y) = 2(y^2/2 - 6)y + 2y = 0$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \Longrightarrow (-7, 0) \\ \\ y^2 - 10 = 0 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{10} \Longrightarrow (-2, \pm\sqrt{10}) \end{array}\right.$$

Luego los candidatos a extremo en esta frontera son: $(-2, \pm\sqrt{10}), (-7, 0)$

(iii.2) Frontera descrita por $(x+3)^2+y^2=16$. Como ninguna de las variables es explícita tenemos que aplicar la regla de los multiplicadores de Lagrange para buscar los candidatos a extremos. La función de Lagrange es

$$L(x,y)=(x+1)^2+y^2+\lambda((x+3)^2+y^2-16).$$

La condición necesaria de extremo condicionado es:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2(x+1)+2\lambda(x+3)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda y=0 \\ (x+3)^2+y^2=16 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} y=0 \\ \text{o} \\ \lambda=-1 \end{array}$$

Si $\lambda=-1$ llegamos a una contradicción en la primera ecuación de la izquierda. Por tanto, $y=0$. Sustituyendo en la condición tenemos que $x=-7$ o $x=1$. Luego los candidatos a extremo son $(-7,0),(1,0)$.

Para finalizar basta valorar la función en los puntos obtenidos:

(x,y)	$f(x,y)$	
$(-7,0)$	36	Máximo absoluto
$(-2,\pm\sqrt{10})$	11	
$(-1,\pm 2\sqrt{3})$	12	
$(-1,0)$	0	Mínimo absoluto
$(1,0)$	4	

Solución del Primer Parcial de Cálculo (O.P.), Plan 96. (1997-98)

1.– Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} -(3x+7) & \text{si } x<-2 \\ x^3-3x+1 & \text{si } -2\leq x \end{cases}.$$

Calcular los extremos absolutos de f en $[-3,3]$.

Solución: En primer lugar estudiamos la continuidad y derivabilidad de f.
– f es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$ por ser una función polinómica. En $x = -2$, debemos calcular los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} -(3x+7) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} x^3 - 3x + 1 = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ es continua en } -2.$$

– f es derivable en $\mathbb{R} - \{-2\}$ por ser una función polinómica. En $x = -2$, debemos estudiar la derivabilidad mediante la definición:

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{f(x)+1}{x+2},$$

para resolver el límite anterior debemos calcular los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{-3x-7+1}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2^-} -3\dfrac{x+2}{x+2} = -3 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3-3x+2}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{(x^2-2x+1)(x+2)}{x+2} = 9 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no es derivable en } -2.$$

El Teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de extremos absolutos de f en $[-3,3]$, ya que f es una función continua en $[-3,3]$ (compacto). Estos extremos se encuentran entre los siguientes puntos:

(a) Puntos de no derivabilidad de f: -2.

(b) Puntos estacionarios de f: $f' = 0$.

(c) Extremos del intervalo de definición: -3,3.

Calculamos los puntos estacionarios:

$$f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 3x^2 - 3 & \text{si } -2 < x < 3 \end{cases}$$

Luego f' sólo se anula para $x \in (-2,3)$.

$$f'(x) = 0 \implies x = 1, x = -1.$$

Finalmente para obtener los extremos absolutos basta calcular los valores de la función en cada uno de los puntos obtenidos:

x	$f(x)$	
-3	2	
-2	-1	Mínimo absoluto
-1	3	
1	-1	Mínimo absoluto
3	19	Máximo absoluto

2.- Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ la suma parcial n-ésima de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$.
(a) Probar que $S_n - S_{n-1} = a_n$.
(b) Usar la parte (a) para calcular el término n-ésimo de una serie cuya suma parcial n-ésima es

$$S_n = \frac{n}{2n+3}.$$

(c) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión hallada en (b), estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ y en caso de ser convergente hallar la suma.

Solución:

(a) $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$.
(b) Si $S_n = \dfrac{n}{2n+3} \implies$

$$a_n = \frac{n}{2n+3} - \frac{n-1}{2n-2+3} = \frac{n}{2n+3} - \frac{n-1}{2n+1} = \frac{3}{(2n+3)(2n+1)}.$$

(c) La serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge sii existe $\lim_{n\to\infty} S_n$ y además $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$. Por tanto basta calcular el límite anterior para este caso.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2}.$$

3.– Encontrar el rectángulo de área máxima inscrito en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$.

Solución:

El área del rectángulo es

$A(x, y) = 2x \cdot 2y = 4xy$, con $x, y > 0$.

La relación entre las variables está dada por la ecuación de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, por tanto despejando una de las variables tenemos:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Sustituimos este valor en la función A,

$$A(x) = 4x\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Para hallar los extremos de esta función derivamos e igualamos a cero.

$$A'(x) = 4\frac{b}{a}[\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}] = 4\frac{b}{a}\frac{a^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}(a^2 - 2x^2) = 0$$

$$\iff a^2 = 2x^2 \iff x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}},$$

como $x > 0 \implies x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \implies y_0 = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

Comprobamos si (x_0, y_0) es un máximo de A. Para ello podemos proceder de dos formas:

(1) Estudiar el signo de A', el cual sólo depende del signo de $a^2 - 2x^2$, que es una parábola que se anula en $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ y en $x = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Si $x < x_0 \implies A' > 0$.

Si $x > x_0 \implies A' < 0$. Por tanto se trata de un máximo para A.

(2) Estudiar el signo de $A''(x_0)$.

$$A''(x) = 4\frac{b}{a}[\frac{-4x\sqrt{a^2 - x^2} - (a^2 - 2x^2)\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2 - x^2}] = 4\frac{b}{a}\frac{-4x(a^2 - x^2) + (a^2 - 2x^2)x}{(a^2 - x^2)^{3/2}} =$$

$= 4\frac{b}{a}x[\frac{2x^2 - 3a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}].$

Evaluamos A'' en el punto x_0:

$A''(\frac{a}{\sqrt{2}}) = 4\frac{b}{a}\frac{a}{\sqrt{2}}[\frac{2\frac{a^2}{2} - 3a^2}{(a^2 - \frac{a^2}{2})^{3/2}}] = -4\frac{b}{\sqrt{2}}\frac{2a^2}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^3} = -16\frac{b}{a} < 0 \implies x_0$ es un máximo para A.

4.– Sean $\alpha > 1$ y $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{\alpha}{x})$, $x > 0$.
(i) Demostrar que f posee un único punto fijo, es decir, existe un $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = x_0$, y calcularlo.
(ii) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida de forma recurrente por

$$x_{n+1} = f(x_n),\ x_0 = \alpha > 1.$$

Demostrar que:
(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente por $\sqrt{\alpha}$.
(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente.
(c) Estudiar la convergencia de la sucesión y probar que el límite es el punto fijo de la función f.

Solución:

(i) Los puntos fijos de la función f son los ceros de la función $g(x) = f(x) - x$. Por tanto basta demostrar que existe un único cero de la función g.

Para acotar el número de ceros podemos aplicar el Teorema de Rolle a g ya que es una función continua y derivable, por serlo f y la identidad.

$g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{\alpha}{x^2}) - 1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha}{2x^2} = 0 \Longleftrightarrow$

$-1 = \dfrac{\alpha}{x^2} \iff x^2 = -\alpha$, lo que es imposible en $\mathbb{R}$, por ser $\alpha > 1 > 0$.

Por tanto, g tiene a lo sumo un cero y en consecuencia f tiene a lo sumo un punto fijo.

Supongamos que x_0 es un punto fijo de f, entonces

$\dfrac{1}{2}(x_0 + \dfrac{\alpha}{x_0}) = x_0 \iff \dfrac{\alpha}{2x_0} = \dfrac{x_0}{2} \iff x_0^2 = \alpha \iff x_0 = \sqrt{\alpha}$,

ya que x_0 debe ser positivo.

(ii) La sucesión definida de forma recurrente es:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{\alpha}{x_n}),\ \ x_0 = \alpha.$$

(a) Debemos demostrar que $x_n \geq \sqrt{\alpha}$.

$x_n \geq \sqrt{\alpha} \iff \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{\alpha}{x_{n-1}}) \geq \sqrt{\alpha} \iff x_{n-1}^2 + \alpha \geq 2x_{n-1}\sqrt{\alpha} \iff$

$x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}\sqrt{\alpha} + \alpha \geq 0 \iff (x_{n-1} - \sqrt{\alpha})^2 \geq 0$,

desigualdad que es siempre cierta.

(b) Debemos demostrar que $x_{n+1} \leq x_n$.

$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{1}{2}(x_n + \frac{\alpha}{x_n}) \leq x_n \iff$

$x_n^2 + \alpha \leq 2x_n^2 \iff \alpha \leq x_n^2 \iff \sqrt{\alpha} \leq x_n$, desigualdad que es cierta por el apartado (a).

(c) Como (x_n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente el Teorema de la convergencia monótona asegura que (x_n) converge. Además si $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$ se verifica:

$$\lim x_{n+1} = \lim \tfrac{1}{2}(x_n + \tfrac{\alpha}{x_n}) \iff \ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{\alpha}{\ell}) \iff$$
$$2\ell^2 = \ell^2 + \alpha \iff \ell^2 = \alpha \iff \ell = \sqrt{\alpha},$$

ya que el límite debe ser positivo, por ser (x_n) una sucesión de términos positivos. Por otro lado vemos que el límite coincide con el punto fijo de la función f.

5.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y^3-x)(e^{x-y}-1)}{x^2-y^2} & \text{si } x^2-y^2 \neq 0 \\ \frac{x^2-1}{2} & \text{si } x^2-y^2 = 0 \end{cases}.$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(ii) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x,1)$. Estudiar la derivabilidad de g en $\mathbb{R}$ y en su caso calcular la función g'.

Solución:

(1) La función f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{x^2-y^2 \neq 0\}$ por ser composición de funciones elementales que son continuas. Debemos estudiar sólo la continuidad en los puntos de las rectas $x-y=0$ y $x+y=0$, ya que entorno de estos puntos la función cambia de definición.

• $x-y=0$, los puntos son de la forma (a,a), $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{y^3-x}{x^2-y^2}(e^{x-y}-1) = \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{y^3-x}{x+y}\frac{e^{x-y}-1}{x-y} =$$
$$\begin{cases} \dfrac{a^3-a}{2a} = \dfrac{a^2-1}{2} = f(a,a) & \text{si}\, a \neq 0 \\ \text{indeterminado} & \text{si}\, a = 0 \end{cases}$$

Para resolver la indeterminación debemos calcular el límite mediante los límites por rectas:

$$y = mx \implies \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^3-x}{x+mx} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^2-1}{1+m} = \frac{-1}{1+m},$$

como este último límite depende de las rectas, la función no es continua en el $(0,0)$, pero s´ i lo es en los puntos de la forma (a,a), $a \neq 0$.

• $x+y=0$, los puntos son de la forma $(a,-a)$, $a \in \mathbb{R}$. Podemos suponer $a \neq 0$, ya que del apartado anterior sabemos que no será continua en este caso.

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{y^3-x}{x^2-y^2}(e^{x-y}-1) = \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{y^3-x}{x+y}\frac{e^{x-y}-1}{x-y} =$$

$$\frac{(-a^3-a)(e^{2a}-1)}{0}=\infty,$$

Luego f no es continua en los puntos de la forma $(a,-a)$.

(ii) La función $g(x)=f(x,1)$ está dada por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)(e^{x-1}-1)}{x^2-1} & \text{si } x\neq 1,-1\\ 0 & \text{si } x=1,-1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{-(e^{x-1}-1)}{x+1} & \text{si } x\neq 1,-1\\ 0 & \text{si } x=1,-1\end{cases}$$

La función g es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$, ya que la función f no era continua en $(-1,1)$. Por tanto también sabemos que g no será derivable en $x=-1$. Por otro lado g es derivable en $\mathbb{R}-\{1,-1\}$ por ser composición de funciones derivables y no anularse el denominador. Luego sólo nos falta por estudiar la derivabilidad en el punto $x=1$, que debemos efectuar mediante la definición.

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{e^{x-1}-1}{x+1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}-\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2},$$

lo que implica que g es derivable en $x=1$.

Por último la función derivada es:

$$g'(x)=\begin{cases}-\frac{e^{x-1}x+1}{(x+1)^2} & \text{si } x\neq 1\\ -\frac{1}{2} & \text{si } x=1\end{cases}$$

SOLUCIÓN EXAMEN DE CÁLCULO. 27 de MAYO 1998

Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques, Pla 96.

P1, F3.– Calcular la distancia mínima y máxima del punto $(1,0)$ al conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-2)^2+y^2\leq 4,\ 2y\leq 6-x,\ x\leq 3\}.$$

Solución:

La función que debemos optimizar es $d((x,y),(1,0))=((x-1)^2+y^2)^{1/2}$. Pero para simplificar los calculos podemos considerar

$$f(x,y)=(x-1)^2+y^2,$$

ya que los puntos extremos de ambas funciones son los mismos.

Determinamos en primer lugar como es el conjunto A donde debemos calcular los extremos. Para ello buscamos los puntos de corte de las diferentes curvas que definen el dominio.

(a)

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\ 2y=6-x\end{cases}\implies (x-2)^2+\frac{(6-x)^2}{4}=4\implies 5x^2-28x+36=0.$$

Luego los puntos de corte son $(2,2)$ y $(\frac{18}{5}, \frac{6}{5})$.

(b)

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ x = 3 \end{array} \right. \implies y^2 = 3.$$

Luego los puntos de corte son $(3, \sqrt{3})$ y $(3, -\sqrt{3})$.

(c)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ 2y = 6 - x \end{array} \right. .$$

Luego el punto de corte es $(3, \frac{3}{2})$.

Por tanto el conjunto A es el representado en la Figura 1.

Notese que f es una función continua (es una función polinómica) y A es un conjunto compacto. Por tanto el Teorema de Weierstrass asegura la existencia de extremos absolutos, que se encontrarán entre los puntos siguientes:

(i) Vértices del conjunto A:

$$(2,2),\ (3,3/2) \text{ y } (3,-\sqrt{3})$$

(ii) Extremos libre de f en el interior de A:

Como estamos bajo hipótesis de diferenciabilidad podemos aplicar la condición necesaria de extremo libre

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array} \implies$$

$$(1,0) \in \mathring{A}$$

(iii) Extremos condicionados en las distintas fronteras.

(iii.1) Frontera descrita por la curva $x = 3$ con $y \in [-\sqrt{3}, 3/2]$. Como la función es explícita podemos sustituir en la función.

$$h(y) = f(3, y) = 4 + y^2 \implies h'(y) = 2y = 0 \implies y = 0.$$

Luego el candidato a extrmo en esta frontera es:

$$(3, 0)$$

(iii.2) Frontera descrita por la curva $2y = 6 - x$ con $x \in [2, 3]$. De nueva podemos sustituir la condición en la función.

$$k(x) = (x-1)^2 + \frac{(6-x)^2}{4} \implies k'(x) = 2(x-1) - \frac{1}{2}(6-x) = 0 \implies x = 2.$$

Pero este punto es un vértice del conjunto y ya está considerado en (i).

(iii.3) Frontera descrita por $(x-2)^2 + y^2 = 4$ con $x \in [2, 3]$. Como ninguna de las variables es explícita tenemos que aplicar la regla de los multiplicadores de Lagrange para buscar los candidatos a extremos. La función de Lagrange es

$$L(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda((x-2)^2 + y^2).$$

La condición necesaria de extremo condicionado es:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda(x-2) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} y = 0 \\ \text{o} \\ \lambda = -1 \end{array}$$

Si $\lambda = -1$ llegamos a una contradicción en la primera ecuación de la izquierda. Por tanto, $y = 0$. Sustituyendo en la condición tenemos que $x = 4$ o $x = 0$. Pero el punto $(4, 0)$ no está en la frontera que estamos considerando. Luego el candidato a extremo es

$$(0, 0)$$

Para finalizar basta valorar la función en los puntos obtenidos:

La distancia máxima es $\sqrt{7}$ y la mínima 0.

(x,y)	$f(x,y)$	
$(2,2)$	5	
$(3,3/2)$	$6,25$	
$(3,-\sqrt{3})$	7	Máximo absoluto
$(1,0)$	0	Mínimo absoluto
$(3,0)$	4	
$(0,0)$	1	

P2.– Probar que el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ xy+z=0 \end{cases}$$

define implícitamente $x=x(z)$, $y=y(z)$ en el entorno de $(x,y,z)=(2,1,-2)$. Si $\alpha(z)=(x(z),y(z),z)$ denota la curva definida por el sistema anterior, calcular la recta tangente y el plano normal a α en $z=-2$.

Solución:

Las funciones que definen el sistema son $f_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9$ y $f_2(x,y,z)=xy+z$. Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita entorno del punto $(2,1,-1)$.
(i) $f_1(2,1,-2)=4+1+4-9=0$ y $f_2(2,1,-2)=2-2=0$. (si)
(ii)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}=2z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=y \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}=x \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}=1.$$

Luego existen las derivadas parciales y son continuas por ser funciones polinómicas, es decir, $f=(f_1,f_2)\in C^{(1)}$. (si)
(iii)

$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{array}\right|_{(2,1,-2)} = \left|\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0. \text{ (si)}$$

Por tanto, el Teorema de la Función Implícita asegura que existen $U((2,1))$, $V(-2)$ y funciones $x = x(z)$ y $y = y(z)$ diferenciables en $V(-2)$, tales que $x(-2) = 2$, $y(-2) = 1$ y verifican el sistema. Además,

$$\begin{pmatrix} x'(-2) \\ y'(-2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha(z) = (x(z), y(z), z)$ es la curva definida por el sistema, su vector tangente en -2 es $\alpha'(-2) = (5/3, -4/3, 1)$. Por tanto, la recta tangente a la curva en $z = -2$ es:

$$\frac{x-2}{5/3} = \frac{y-1}{-4/3} = \frac{z+2}{1},$$

y el plano normal es:

$$\frac{5}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y-1) + (z+2) = 0 \implies 5x - 4y + 3z = 0.$$

P3, F4.– Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2, x \leq 3 - 2y^2\}$.
(i) Calcular el área de R.
(ii) Hallar el volumen del sólido de base R cuyas secciones transversales, perpendiculares al eje x, son cuadrados.

Solución: Calculmos los puntos de corte de las dos parábolas.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ x = 3 - 2y^2 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad x = 1.$$

Por tanto los puntos de corte son $(1,1)$ y $(1,-1)$. Representamos en la Figura 2 el recinto encerrado entre las dos parábolas.

(i) Por simetría el área pedida es el doble de:

$$A' = \int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^3 \sqrt{\frac{3-x}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{2/3}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}2(\frac{3-x}{2})^{2/3}\Big|_1^3 = 2.$$

Por tanto el área pedida es 4.

(ii) Aplicamos la fórmula del volumen por secciones:

$$V = \int A(x)dx.$$

Como las secciones son cuadrados tenemos que $A(x) = l^2(x)$. Donde $l(x)$ es:

(1) Si $x \in [0,1]$, $l(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$.

(2) Si $x \in [1,3]$, $l(x) = \sqrt{\frac{3-x}{2}} - (-\sqrt{\frac{3-x}{2}}) = 2\sqrt{\frac{3-x}{2}}$.

Por tanto,

$$V = \int_0^1 4xdx + \int_1^3 2(3-x)dx = 2x^2\Big|_0^1 - (3-x)^2\Big|_1^3 = 6.$$

P4.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y^2} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

(i) Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.
(ii) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = f(x, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}})$. Calcular, si existe, la derivada de $\int_0^{\sqrt{t}} g(x)dx$.

Solución:

(i) Veamos en primer lugar que f es continua en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y^2} = 0,$$

ya que $\sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y^2}$ es una función acotada y $x^2 y$ tiende a 0. Por tanto, f es continua en $(0,0)$.

Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0 \end{array}.$$

Comprobamos si $\nabla f(0,0) = (0,0)$ es la diferencial de f en $(0,0)$:

$$0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = (*),$$

debemos distinguir tres casos:

(1) $hk \neq 0$.

$$(*) = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\neq 0}} \frac{h^2 k \sin \frac{1}{h} \cos \frac{1}{k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\neq 0}} h^2 \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \sin 1h \cos \frac{1}{k^2} = 0.$$

(2) $h = 0$.

$$(*) = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h=0}} \frac{0}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

(2) $k = 0$.

$$(*) = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k=0}} \frac{0}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Como los tres límites existen y valen 0, el límite $(*)$ también existe y vale 0. Por tanto f es diferenciable en $(0,0)$ y $df(0,0) = (0,0)$.

(ii) Si $g(x) = f(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}})$, entonces

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\pi}} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La función g es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ por ser composición de funciones elementales y no anularse el denominador. Veamos si es continua en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{\sqrt{\pi}} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = g(0).$$

Por tanto g es continua en $\mathbb{R}$.

Sea $F(t) = \int_0^{\sqrt{t}} g(x)dx$. La fución F es derivable, ya que g es continua y por tanto su función integral será derivable. Además $\sqrt{t}$ es derivable en $\mathbb{R}^+$.

$$F'(t) = g(\sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} t \sin \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \sin \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

F1.– Demostrar que las curvas $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$ se cortan ortogonalmente.

Solución:

En primer lugar hallamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \implies \frac{x^2}{3} + x^2 - 1 = 1 \implies 4x^2 = 6 \implies x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ o } x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto los puntos de corte son

$$(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}),\ (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}),\ (-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}),\ (-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Para demostrar que se cortan ortogonalmente basta probar que los gradientes a cada una de las curvas en los puntos de intersección son ortogonales, ya que ambas curvas están definidas como curvas de nivel de las funciones $f_1(x,y) = \frac{x^2}{3} + y^2$ y $f_2(x,y) = x^2 - y^2$.

$$\begin{cases} \nabla f_1(x,y) = (\frac{4}{3}x, 2y) \\ \nabla f_2(x,y) = (2x, -2y) \end{cases} \implies \langle \nabla f_1(x,y), \nabla f_2(x,y) \rangle = \frac{4}{3}x^2 - 4y^2.$$

El valor del producto escalar anterior en cualquiera de los puntos de intersección es:

$$\frac{4}{3}x^2 - 4y^2 = \frac{4}{3}\frac{3}{2} - 4\frac{1}{2} = 0.$$

Por tanto las curvas se cortan ortogonalmente.

2.– Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{ax+b}{x^2+2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(i) Hallar los valores de a, b para que f sea continua en $x = 0$ y tenga derivada nula en $x = 2$.
(ii) Estudiar la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.
(iii) Hallar los extremos absolutos de f en $[1, 4]$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado (i).

Solución: (i) Para que f sea continua en $x = 0$ deben existir y coincidir los límites laterales de la función en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{ax+b}{x^2+2x+1} = b \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad b = -1.$$

La función f es derivable en $x = 2$ ya que es cociente de funciones derivables y no se anula el denominador, debemos imponer que la derivada sea nula:

$$f'(x) = \frac{a(x^2+2x+1) - (ax-1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} = \frac{-ax^2+2x+a+2}{(x^2+2x+1)^2} \text{ si } x > 0.$$

$f'(2) = 0 \iff -3a + 6 = 0 \iff a = 2.$

(ii) Consideramos ahora la funicón con los valores $a = 2$ y $b = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2x-1}{x^2+2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ por ser composición de funciones derivables. Para estudiar la derivabilidad en $x = 0$, debemos calcular los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x^2+1}{x-1}+1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x-1}{x^2+2x+1}+1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+4}{x^2+2x+1} = 4$$

Por tanto f no es derivable en $x = 0$.

(iii) f es una función continua y derivable en el conjunto compacto $[1, 4]$. Por tanto el Teorema de Weierstrass asegura la existencia de extremos absolutos en este intervalo.

Para calcularlos debemos distinguir entre el interior del intervalo y las fronteras:

(1) $(1,4)$. La condición necesaria de extremos libre es:

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2x+1)^2} = 0 \implies x = -2 \text{ y } x = 1.$$

Para finalizar basta valorar la función en los diferentes puntos:

x	$f(x)$	
-2	$-5/9$	Mínimo absoluto
1	$1/3$	Máximo absoluto
4	$7/25$	

SOLUCIÓN DEL EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO.

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.), Plan 96

1.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & x > -y, \\ 2x & x = -y, \\ \dfrac{\ln(x^2-y^2+1)}{x+y} & x < -y. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(ii) Definimos $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = f(x,1)$. Analizar la derivabilidad de g en $\mathbb{R}$ y, en su caso, calcular g'.

Solución: (i) f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$ por ser composición de funciones elementales. Falta examinar que ocurre en puntos de la recta $x = -y$, es decir, $(a,-a), a \in \mathbb{R}$. Para el cálculo de $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y)$ tenemos que distinguir tres regiones, ya que la función está definida a trozos.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x>-y}} \frac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x>-y}} (x-y)\frac{(x+y)}{e^{x+y}-1} = 2a$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x=-y}} 2x = 2a$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x<-y}} \frac{\ln(x^2-y^2+1)}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x<-y}} \frac{\ln(x^2-y^2+1)}{x^2-y^2}(x-y) = 2a.$$

En (1) debemos suponer que $a \neq 0$, ya que como dividimos por $x-y$, debemos asegurar que es distinto de cero, y esto ocurre si $a \neq 0$. Por tanto, el límite existe y vale $2a =$

$f(a,-a), a \neq 0$, es decir, f es continua en estos puntos. Cuando $a = 0$ debemos calcular el último límite de la siguiente forma:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<-y\\ x\neq y}} \frac{\ln(x^2-y^2+1)}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<-y\\ x\neq y}} \frac{\ln(x^2-y^2+1)}{x^2-y^2}(x-y) = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<-y\\ x=y}} \frac{\ln(1)}{x+y} = 0.$$

(ii) La función g está definida como

$$g(x) = f(x,1) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{e^{x+1}-1} & x > -1, \\ -2 & x = -1, \\ \dfrac{\ln x^2}{x+1} & x < -1. \end{cases}$$

Por el apartado anterior sabemos que g es continua en $\mathbb{R}$. Además g es derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$ por ser composición de funciones elementales que son derivables. Sólo falta por analizar qué ocurre con $x = -1$. Procedemos mediante la definición de derivada.

$$\lim_{x\to -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = ...$$

Para calcular este límite tenemos que calcular los límites laterales.

- $$\lim_{x\to -1^+} \frac{\dfrac{x^2-1}{e^{x+1}-1}+2}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-3+2e^{x+1}}{(e^{x+1}-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x+2e^{x+1}}{e^{x+1}(x+1)+(e^{x+1}-1)}$$
$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{2+2e^{x+1}}{e^{x+1}(x+1)+2e^{x+1}} = 2$$
- $$\lim_{x\to -1^-} \frac{\ln(x^2)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x} = -2.$$

(En los cálculos anteriores se ha aplicado la regla de L'Hopital).

Por tanto g no es derivable en $x = -1$. Para finalizar calculamos g'.

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+1}(2x-x^2+1)-2x}{(e^{x+1}-1)^2} & x > -1, \\ \dfrac{2(x+1)-x\ln x^2}{x(x+1)^2} & x < -1. \end{cases}$$

2.- (a) Sea (y_n) una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{y_1}{1}+\dfrac{y_2}{2}+\cdots+\dfrac{y_n}{n}}{\ln(n)}.$$

(b)Una sucesión (x_n) es una progresión aritmética si existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{n+1} = d + x_n, \ \ n \geq 1.$$

(i) Probar que $x_n = x_1 + (n-1)d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Probar que $x_1 + \cdots + x_n = n\dfrac{x_1 + x_n}{2}$.

(iii) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\Big).$$

Solución: (a) Para el cálculo del límite podemos aplicar el criterio de Stolz ya que la sucesión del denominador $\ln(n)$ es estrictamente creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{y_1}{1} + \dfrac{y_2}{2} + \cdots + \dfrac{y_n}{n}}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{y_{n+1}}{n+1}}{\ln(\dfrac{n+1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{(n+1)\ln(1+\dfrac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{\dfrac{n+1}{n}} = a,$$

donde se ha aplicado que $\ln(1+\dfrac{1}{n})$ es un infinitésimo equivalente a $\dfrac{1}{n}$.

(b) Sea (x_n) una progresión aritmética es decir

$$x_{n+1} = d + x_n, \ \ n \geq 1.$$

(i) Para probar que $x_n = x_1 + (n-1)d$, $\forall n \in \mathbb{N}$, procedemos por inducción.

Por definición $x_2 = d + x_1 = x_1 + (2-1)d$, por tanto se verifica la fórmula para $n = 2$. Supongamos que es cierta para n, es decir, $x_n = x_1 + (n-1)d$ (H.I.). Debemos probarla para $n+1$,

$$x_{n+1} = x_n + d = x_1 + (n-1)d + d = x_1 + nd.$$

Luego la fórmula es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Para probar $x_1 + \cdots + x_n = n\dfrac{x_1 + x_n}{2}$, procedemos de nuevo por inducción.

Para $n = 2$, $x_1 + x_2 = 2\dfrac{x_1 + x_2}{2}$, luego la fórmula es cierta. Supongamos ahora que es cierta para n, es decir, $x_1 + \cdots + x_n = n\dfrac{x_1 + x_n}{2}$. Debemos probarla para $n+1$.

$$\begin{aligned}
x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} &= n\frac{x_1 + x_n}{2} + x_{n+1} = n\frac{x_1 + x_{n+1} - d}{2} + x_{n+1} \\
&= n\frac{x_1 + x_{n+1}}{2} - \frac{dn}{2} + x_1 + nd = n\frac{x_1 + x_{n+1}}{2} + \frac{dn}{2} + \frac{2x_1}{2} \\
&= n\frac{x_1 + x_{n+1}}{2} + \frac{dn + x_1}{2} + \frac{x_1}{2} \\
&= n\frac{x_1 + x_{n+1}}{2} + \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_1}{2} = (n+1)\frac{x_1 + x_{n+1}}{2}.
\end{aligned}$$

(iii) Usando el apartado anterior obtenemos que

$$1 + 2 + \cdots + n = n\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por tanto el límite pedido es

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

3.- Se considera la función $y(x)=\dfrac{1}{x}$. Demostrar que el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a $y(x)$ en el punto x es constante.

Solución: Calculamos en primer lugar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=y(x)=\dfrac{1}{x}$ en un punto genérico (x_0,y_0), donde $y_0=\dfrac{1}{x_0}$.

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0).$$

Hallamos ahora los puntos de corte de dicha recta con los ejes coordenados:

$$\begin{cases} y-y_0=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0) \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow\ x=2x_0$$

$$\begin{cases} y-y_0=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0) \\ x=0 \end{cases} \Longrightarrow\ y=\frac{2}{x_0}$$

Por tanto, el área del triángulo será $A(x_0)=\dfrac{1}{2}(2x_0\dfrac{2}{x_0})=2.$

4.- Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} |x+2|-2 & -4\le x\le 0, \\ \text{máx}\{0,-x^2+4x-3\} & 0<x\le 4. \end{cases}$$

Calcular los extremos absolutos de f en $[-4,4]$.

Solución: En primer lugar analizamos como es la función $g(x)=\text{máx}\{0,-x^2+4x-3\},\ \ 0<x\le 4$. Para ello, estudiamos el polinomio $-x^2+4x-3$. Sus raíces son $x_0=1$ y $x_1=3$, además como el coeficiente de x^2 es negativo su gráfica es:

Por tanto,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 3 & 1 < x \leq 3 \\ 0 & 3 < x \leq 4. \end{cases}$$

La función f puede ser definida de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+4) & -4 \leq x \leq -2, \\ x & -2 < x \leq 0, \\ 0 & 0 < x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 3 & 1 < x \leq 3 \\ 0 & 3 < x \leq 4. \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de la función f en los puntos donde cambia de definición:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} -(x+4) = -2 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} -x^2 + 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} -x^2 + 4x - 3 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} 0 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, f es continua en $[-4, 4]$. Por el teorema de Weiestrass f alcanza extremos absolutos en $[-4, 4]$ que se hallarán entre los siguientes puntos:
(i) Puntos frontera del intervalo, -4 y 4.
(ii) Puntos de no derivabilidad que son $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.
(iii) Puntos estacionarios, es decir, $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} &\text{En } (-4,-2) \ f'(x) = -1 \neq 0, \text{ luego no existen.} \\ &\text{En } (-2,0) \ f'(x) = 1 \neq 0 \text{ luego no existen} \\ &\text{En } (0,1) \ f'(x) = 0, \text{ luego todos son estacionarios} \\ &\text{En } (1,3) \ f'(x) = -2x + 4, \text{ luego } x = 2 \\ &\text{En } (3,4) \ f'(x) = 0, \text{ luego todos son estacionarios} \end{aligned}$$

Finalmente para obtener los extremos absolutos basta calcular los valores de la función en cada uno de los puntos obtenidos:

SOLUCIÓN DEL EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO

19 de enero de 2001

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.), Plan 96

x	$f(x)$	
-4	0	
4	0	
-2	-2	Mínimo absoluto
0	0	
1	0	
3	0	
$(0,1)$	0	
2	1	Máximo absoluto
$(3,4)$	0	

1.- Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)\ln(n^2-n+1)}{n} \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} 2n(e^{\frac{1}{n}}-1)$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})+1\Big)^n \qquad (iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Solución:

$(i)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n)\ln(n^2-n+1)}{n} = \left[\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2-n+1)}{n} = 0 \ \text{ escala de infinitos} \\ \cos(n) \ \text{ acotada} \end{array}\right] = 0\times$ acotada $= 0$.

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} 2n(e^{\frac{1}{n}}-1) = \lim_{n\to\infty} 2\frac{(e^{\frac{1}{n}}-1)}{\frac{1}{n}} = 2 \text{ infinitésimos equivalentes.}$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})+1\Big)^n = [1^\infty] = e^{\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n})} = e^0 = 1.$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \cdots$$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ y $b_n = n\sqrt{n}$. Como b_n es creciente y tiene límite infinito podemos aplicar este criterio.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = [\times \text{ y } \div \text{ por el conjugado}] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{\left((n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}\right)\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+n\sqrt{n(n+1)}}{((n+1)^3-n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1+n\sqrt{n^2+n}}{3n^2+3n+1} = 2/3.$$

2.- Estudiar la continuidad de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & x > -y, \\ 2x & x = -y, \\ \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x+y} & x < -y. \end{cases}$$

Solución: (i) f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ por ser composición de funciones elementales. Falta examinar qué ocurre en puntos de las rectas: $x+y=0$, es decir, $(a,-a), a \in \mathbb{R}$.

Para el cálculo de $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y)$ tenemos que distinguir dos regiones, ya que la función está definida a trozos.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x>-y}} \frac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x>-y}} \frac{x+y}{e^{x+y}-1}(x-y) = 2a$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x<-y}} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x+y} =^{*} \lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x<-y}} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}(x-y) = 2a$$

(* este paso está bien hecho siempre que $a \neq 0$, por lo que realizaremos este caso al final y supondremos ahora que $a \neq 0$).

Por tanto, la función es continua en los puntos de la forma $(a,-a), a \neq 0$. Calculamos ahora el $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<-y}} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x+y}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<-y\\ x-y\neq 0}} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}(x-y) = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<-y\\ x-y=0}} \frac{\sin(0)}{x+y} = 0$$

Luego la función también es continua en este punto.

3.- (i) Demostrar que las curvas $y_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $y_2(x) = e^x - 1$ se cortan en un único punto en el intervalo $(-\infty, 1)$.

(ii) Demostrar que las rectas tangentes a las curvas anteriores en el punto $x = 0$ tienen direcciones ortogonales.

Solución: (i) Para demostrar que las curvas dadas se cortan en un único punto basta aplicar los Teoremas de Bolzano y Rolle. Para ello definimos en primer lugar la función $f : (-\infty, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - e^x + 1.$$

Esta función es continua y derivable en $(-\infty, 1)$ ya que es composición de funciones elementales y no se anula el denominador. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Rolle. Calculamos f' y estudiamos sus ceros:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - e^x = 0 \iff \frac{-1}{(x-1)^2} = e^x,$$

que es imposible en $\mathbb{R}$ por tanto como f' no se anula f tendrá a lo sumo un cero. Para demostrar que lo hace exactamente en un punto basta que apliquemos el Teorema de Bolzano para encontrar un intervalo donde la función cambie de signo en los extremos.

Probamos con $[-1, 0]$,

$$\begin{array}{l} f(-1) = 1/2 - 1/e > 0 \\ f(0) = -1 < 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \text{existe } x_0 \in (-1, 0) \text{ tal que } f(x_0) = 0.$$

(ii) Recordamos en primer lugar que la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ está dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Por tanto, la recta tangente a $y_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $x = 0$ es $y + 1 = -x$, cuya pendiente es $m_1 = -1$. Por otro lado, la recta tangente a $y_2(x) = e^x - 1$ en $x = 0$ es $y = x$, cuya pendiente es $m_2 = 1$. Como $m_1 m_2 = (-1)(1) = -1$ las dos rectas tangentes tienen direcciones ortogonales.

4.- Sea $f : [-3,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^3 & -3 \le x < -1, \\ -x^2+2 & -1 \le x \le 1, \\ e^{x-1} & 1 < x \le 2, \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f.
(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de f en $[-3,2]$.

Solución: La gráfica de f es:

(i) Estudiamos la continuidad de la función f en los puntos donde cambia de definición, ya que en los demás puntos es continua por ser composición de funciones elementales que los son:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} (x+2)^3 = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} -x^2+2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} -x^2+2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} e^{x-1} = 1 \end{cases}$$

Por tanto, f es continua en $[-3,2]$, que es compacto. Luego:

(ii) Por el teorema de Weiestrass f alcanza extremos absolutos en $[-3,2]$ que se hallarán entre los siguientes puntos:
(a) Puntos frontera del intervalo, -3 y 2.
(b) Puntos de no derivabilidad. Deben hallarse entre los puntos donde la función cambia de definición. Para calcularlos hallamos f' y los límites laterales en los cambios de definición:

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x+2)^2 & -3 < x < -1, \\ -2x & -1 < x < 1, \\ e^{x-1} & 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x+2)^3-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x^2+5x+7)(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} x^2+5x+7 = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-x^2+2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(x+1)(1-x)}{x+1} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} = \dfrac{-x^2+2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(x+1)(1-x)}{x-1} = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} = 1 \end{cases}$$

Por tanto, f no es derivable en $x = -1, 1$.
(c) Puntos estacionarios, es decir, $f'(x) = 0$:

$$\text{en } (-3,-1)\ f'(x) = 3(x+2)^2 = 0 \Longrightarrow x = -2$$
$$\text{en } (-1,1)\ f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$\text{en } (1,2)\ f'(x) = e^{x-1} > 0, \text{ luego no existen}$$

El signo de la derivada nos ayuda a clasificar los extremos locales o relativos de la función, dado que ésta es continua:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ -3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 \end{array}$$

Del esquema anterior podemos decucir que f presenta un punto de silla en $x = -2$, un mínimo local en el punto, $x = 1$ y un máximo local en los puntos $x = 0$.

Finalmente para obtener los extremos absolutos basta calcular los valores de la función en cada uno de los puntos obtenidos:

x	$f(x)$	
-3	-1	Mínimo absoluto
-2	0	
-1	1	
0	2	
1	1	
2	e	Máximo absoluto

SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE CÁLCULO

16 de mayo de 2001

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.), Plan 96

P1-[1] .- Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - 2^n}{n} \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} (1 + \sin(1/n))^n$$
$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n) - \tan(1/n)}{n} \qquad (iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}$$

Solución:

$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - 2^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n}(1 - (2/e)^n) = [\text{ escala de infinitos}] = \infty \times 1 = \infty.$

$(ii)\ \lim_{n\to\infty} (1{+}\sin(1/n))^n = [1^\infty] = e^{\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n)} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n}} = [\text{infinitésimos equivalentes}] = e.$

$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n) - \tan(1/n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sin(n)\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{\tan(1/n)}{n} = [0 \times \text{acotada}] - \frac{0}{\infty} = 0 - 0 = 0$

$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \cdots$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ y $b_n = n^4$. Como b_n es creciente y tiene límite infinito podemos aplicar este criterio.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)^4 - n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1} = 1/4$$

P1-[2] .- Demostrar que la ecuación $x = \tan x$ tiene una única raíz en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$.

Solución: (i) Para demostrar que la ecuación $x = \tan(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$, basta aplicar el Teorema de Rolle. Para ello definimos en primer lugar la función $f : [-\pi/4, \pi/4] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = x - \tan(x).$$

Esta función es continua y derivable en $[-\pi/4, \pi/4]$, ya que es composición de funciones elementales. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Rolle. Calculamos f' y estudiamos su signo y sus ceros:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \ (f' = 0 \iff x = 0) \text{ y } f' < 0.$$

Como f' sólo se anula una vez, obtenemos que f se anulará a lo sumo dos veces. Pero al ser f estrictamente decreciente y anularse en $x = 0$, sólo hay un cero de f, $x = 0$.

P1-[3] .- Sea $f : [-1,2] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1,0) \\ e^x & \text{si } x \in [0,1] \\ e \cdot x & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $[-1,2]$.
(ii) Estudiar los extremos absolutos de f en $[-1,2]$ y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto.

Solución: (i) La gráfica de f es:

Estudiamos la continuidad de la función f en los puntos donde cambia de definición, ya que en el resto del dominio es suma y producto de funciones elementales:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} 1 - x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} e^x = e \\ \lim\limits_{x \to 1^+} e \cdot x = e \end{cases}$$

Por tanto, f es continua en $[-1,2]$, que es compacto. Luego:

(ii) Por el teorema de Weiestrass f alcanza extremos absolutos en $[-1,2]$ que se hallarán entre los siguientes puntos:
(a) Puntos frontera del intervalo, -1 y 2.
(b) Puntos de no derivabilidad. Deben hallarse entre los puntos donde la función cambia de definición. Para calcularlos hallamos f' y los límites laterales en los cambios de definición:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0, \\ e^x & 0 < x < 1, \\ e & 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} -2x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} e^x = e \\ \lim\limits_{x \to 1^+} e = e \end{cases}$$

Por tanto, f no es derivable en $x = 0$ y sí lo es en $x = 1$, además $f'(1) = e$.

(c) Puntos estacionarios, es decir, $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\text{en } (-1,0)\ f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ no pertenece al intervalo}\\
&\text{en } (0,1]\ f'(x) = e^x > 0 \text{ luego no existen}\\
&\text{en } (1,2)\ f'(x) = e > 0, \text{ luego no existen}
\end{aligned}$$

La función no tiene puntos estacionarios.

Finalmente para obtener los extremos absolutos basta calcular los valores de la función en cada uno de los puntos obtenidos:

x	$f(x)$	
-1	0	Mínimo absoluto
0	1	
2	$2e$	Máximo absoluto

P1-[4] .- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

La función fuera del $(0,0)$ es continua por ser composición de funciones elementales y no anularse el denominador en la fracción que la define. Miramos pues que ocurre en el origen de coordenadas. Debemos verificar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} =^* \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 0\times\text{acotada}\times 1 = 0$$

* como dividimos por xy debemos suponer que no se anula y a continuación usar la descomposición del domino:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{0}{\sqrt{y^2}} = 0$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{0}{\sqrt{x^2}} = 0$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE CÁLCULO

16 de mayo de 2001

Ingeniería Técnica de Obras Públicas (E.T.S.E.C.C.P.B.), Plan 96

P1-[1] .- Calcular los siguientes límites:

$$(i) \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - 2^n}{n} \qquad (ii) \lim_{n\to\infty} (1+\sin(1/n))^n$$
$$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n) - \tan(1/n)}{n} \qquad (iv) \lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}$$

Solución:

$(i) \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - 2^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n}(1-(2/e)^n) = [\text{ escala de infinitos}] = \infty \times 1 = \infty.$

$(ii) \lim_{n\to\infty} (1+\sin(1/n))^n = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(1/n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n}} = [\text{infinitésimos equivalentes}] = e.$

$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n) - \tan(1/n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sin(n)\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{\tan(1/n)}{n} = [0 \times \text{acotada}] - \frac{0}{\infty} = 0 - 0 = 0$

$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \cdots$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ y $b_n = n^4$. Como b_n es creciente y tiene límite infinito podemos aplicar este criterio.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)^4 - n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1} = 1/4$$

P1-[2] .- Demostrar que la ecuación $x = \tan x$ tiene una única raíz en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$.

Solución: (i) Para demostrar que la ecuación $x = \tan(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$, basta aplicar el Teorema de Rolle. Para ello definimos en primer lugar la función $f : [-\pi/4, \pi/4] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = x - \tan(x).$$

Esta función es continua y derivable en $[-\pi/4, \pi/4]$, ya que es composición de funciones elementales. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Rolle. Calculamos f' y estudiamos su signo y sus ceros:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow (f' = 0 \iff x = 0) \text{ y } f' < 0.$$

Como f' sólo se anula una vez, obtenemos que f se anulará a lo sumo dos veces. Pero al ser f estrictamente decreciente y anularse en $x = 0$, sólo hay un cero de f, $x = 0$.

P1-[3] .- Sea $f : [-1, 2] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ e^x & \text{si } x \in [0, 1] \\ e \cdot x & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $[-1, 2]$.
(ii) Estudiar los extremos absolutos de f en $[-1, 2]$ y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto.

Solución: (i) La gráfica de f es:

Estudiamos la continuidad de la función f en los puntos donde cambia de definición, ya que en el resto del dominio es suma y producto de funciones elementales:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} 1 - x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} e^x = e \\ \lim\limits_{x \to 1^+} e \cdot x = e \end{cases}$$

Por tanto, f es continua en $[-1, 2]$, que es compacto. Luego:

(ii) Por el teorema de Weiestrass f alcanza extremos absolutos en $[-1, 2]$ que se hallarán entre los siguientes puntos:
(a) Puntos frontera del intervalo, -1 y 2.
(b) Puntos de no derivabilidad. Deben hallarse entre los puntos donde la función cambia de definición. Para calcularlos hallamos f' y los límites laterales en los cambios de definición:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0, \\ e^x & 0 < x < 1, \\ e & 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} -2x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} e^x = e \\ \lim\limits_{x \to 1^+} e = e \end{cases}$$

Por tanto, f no es derivable en $x = 0$ y sí lo es en $x = 1$, además $f'(1) = e$.

(c) Puntos estacionarios, es decir, $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\text{en } (-1,0) \ f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ no pertenece al intervalo} \\
&\text{en } (0,1] \ f'(x) = e^x > 0 \text{ luego no existen} \\
&\text{en } (1,2) \ f'(x) = e > 0, \text{ luego no existen}
\end{aligned}$$

La función no tiene puntos estacionarios.

Finalmente para obtener los extremos absolutos basta calcular los valores de la función en cada uno de los puntos obtenidos:

x	$f(x)$	
-1	0	Mínimo absoluto
0	1	
2	$2e$	Máximo absoluto

P1-[4] .- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

La función fuera del $(0,0)$ es continua por ser composición de funciones elementales y no anularse el denominador en la fracción que la define. Miramos pues que ocurre en el origen de coordenadas. Debemos verificar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} =^* \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 0 \times \text{acotada} \times 1 = 0$$

* como dividimos por xy debemos suponer que no se anula y a continuación usar la descomposición del domino:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{0}{\sqrt{y^2}} = 0$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{0}{\sqrt{x^2}} = 0$$