PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2001

MAT 1408 $*$ GUIA N°7

1. La suma de cuatro n'umeros en P.A. es 24 y la suma de sus cuadrados es 164. Hallar los n'umeros.

2. La $\{a_k\}$ una sucesi'on de n'umeros que satisface

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n + 3n^2$$

   Demostrar que es una P.A. y encontrar una expresi'on para a_n en t'erminos de n.

3. Si los n'umeros x, y, z estan en P.G. y son distintos, demostrar que

$$\frac{1}{y-x}, \ \frac{1}{2y}, \ \frac{1}{y-z}$$

   est'an en P.A.

4. Sea $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

   (a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$
   (b) $(n+1)^{n+1} < 2^{n+1}\, n^n$ si $n > 1$.
   (c) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, si $n > 1$.
   (d) $2^{n+4} > (n+4)^2$.
   (e) $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2n-1)$.
   (f) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$.
   (g) $(n!)^3 < n^n \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$.

5. Demuestre:

   (a) $\dfrac{(2n)!}{n!} = 2^n(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))$

(b) $r\binom{n}{r} = n\left(\begin{array}{c} n-1 \\ r-1 \end{array}\right)$.

(c) $\left(\begin{array}{c} n \\ r+1 \end{array}\right) = \dfrac{n-r}{r+1}\dbinom{n}{r}$.

6. Encontrar el t'ermino independiente de x en el desarrollo de

$$(2x+1)\left(1+\frac{2}{x}\right)^{15}$$

7. Encontrar el valor de a para que los coeficientes de x^7 y x^6 en el desarrollo de $(x+a)^5 \cdot (x-2a)^3$ sean iguales.

8. Encuentre el coeficiente de x^4 en el desarrollo de

$$(1+2x+3x^2)^5.$$

9. Encuentre el coeficiente de x^n en

   (a) $\left(1+\frac{1}{4}x\right)^{2n}$.

   (b) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2n}$.

10. Demostrar:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \cdots + \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right)\binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

11. Demuestre que:

$$\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + \frac{2\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + \cdots + \frac{n\binom{n}{n}}{\left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right)} = \frac{1}{2}n(n+1)$$

12. Si n es par, demuestre que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right).$$

13. Demuestre que:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}.$$

14. Demostrar por inducci'on que:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} r+k \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} r+n+1 \\ n \end{array} \right)$, $r \in \mathbb{N}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ m+1 \end{array} \right), \quad m \in \mathbb{N}$.

(c) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{r}{k} (-1)^k = (-1)^n \left(\begin{array}{c} r-1 \\ n \end{array} \right), \quad r \in \mathbb{N}$.

15. Calcular:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} aq^k, \quad a, q \in \mathbb{R}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a + kd), \quad a, d \in \mathbb{R}$.

16. Probar que:

$$(1+x)^{2n} - 2nx(1+x)^{2n-1} + \frac{2n(2n-2)}{2!} x^2(1+x)^{2n-2} - \cdots = (1-x^2)^n$$

(hasta $2n$ t'erminos)

17. Probar que:

$$\binom{n}{0} x + \binom{n}{1} \frac{x^2}{2} + \binom{n}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \left((1+x)^{n+1} - 1\right)$$