# Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

## ALGEBRA MA–11A

### Guía de Problemas No 3, 1999

# 1 Estructuras Algebraicas, Números Complejos y Polinomios.

1. Sea $(G, *)$ un grupo y $H$ un subconjunto de $G$ tal que $x * H = H * x$, donde $x * H = \{x * h / h \in H\}$ y $H * x = \{h * x / h \in H\}$. Se define la relación de equivalencia $\mathcal{R}_H$ en $G$ como:
$$x \mathcal{R}_H y \iff x * y^{-1} \in H$$
   (a) Probar que $*$ es compatible con $\mathcal{R}_H$, es decir:
$$x \mathcal{R}_H y \ \wedge \ z \mathcal{R}_H w \implies (x * z) \mathcal{R}_H (y * w)$$
   (b) Probar que $[x]_{\mathcal{R}_H} = \{y \in G / y = h * x \text{ para algún } h \in H\}$.
   (c) Se define para las clases de equivalencia de $\mathcal{R}_H$:
$$[x]_{\mathcal{R}_H} \odot [y]_{\mathcal{R}_H} = [x * y]_{\mathcal{R}_H}$$
   Probar que la operación está bien definida.
   (d) Probar que $(G/H, \odot)$ es un grupo (que se llama grupo cuociente) donde $G/H = \{[x]_{\mathcal{R}_H} / x \in G\}$. Probar que $[e]_{\mathcal{R}_H} = H$, donde $e$ es el neutro de $(G, *)$.

2. (a) Calcule
$$\left( \frac{1 + \sqrt{3} \cdot i}{1 - i} \right)^{40}$$
   (b) Sabiendo que el polinomio
$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8$$
   posée sólo raíces complejas y que una de ellas tiene módulo 2, encuentre todas las raíces del polinomio.

3. (a) Determine todos los números complejos tales que $\mid z - 2 \mid = 1$.
   (b) Resuelva la ecuación en $\boldsymbol{C}$, $z^5 = i$.

(c) Dibuje la región $\{z \in \mathbb{C} / \mid z-2 \mid \leq \mid z-1 \mid\}$.

4. Sea $(G, \otimes)$ un grupo y $(H, \otimes)$ un subgrupo de $(G, \otimes)$. Se define para $a \in G$ y $b \in G$:

$$a \otimes H = \{a \otimes h / h \in H\}$$

Probar que:

(a) Si $g \in H \Longrightarrow g \otimes H = H$.

(b) Si $a \otimes H \cap b \otimes H \neq \emptyset \Longrightarrow a \otimes H = b \otimes H$.

5. Sea $U$ un conjunto no vacío cualquiera y sea $\mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2)$ el conjunto de las funciones de $U$ en $\mathbb{Z}_2$. A todo subconjunto $X \subseteq U$ le asociamos la función $\mathbb{1}_X : U \to \mathbb{Z}_2$ tal que,

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin X \\ 1 & si\ x \in X \end{cases}$$

que se denomina la indicatriz del conjunto $X$.

(a) Probar que si $f \in \mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2)$ entonces existe $X \subseteq U$ tal que $f = \mathbb{1}_X$.

(b) Sobre $\mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2)$ se definen las siguientes operaciones:

$$(\mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_B)(x) = \mathbb{1}_A(x) +_2 \mathbb{1}_B(x)$$
$$(\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_B)(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot_2 \mathbb{1}_B(x)$$

donde $A, B \in U$ y $x \in U$.

Demuestre que $(\mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2), \oplus, \bullet)$ es un anillo conmutativo con unidad.

6. Sea $f : (\mathbb{Z}_m, \oplus) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo cualquiera. Demuestre que $f$ es la función constante 0.

**Indicación:** Recuerde que en $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ : $[1] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1] = 0$ ($m$ veces).

7. Realice las siguientes diviciones :

- $x^n - a^n \div x - a$.
- $x^n + a^n \div x - a$.
- $i \cdot z^3 + (3 + 8 \cdot i) \cdot z^2 + (-1 + 19 \cdot i) \cdot z + 3 \cdot z \cdot i - 40 \div i \cdot z + 4 + 5 \cdot i$.

8. Dado un polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se define :

$$L(p)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

(a) Demuestre que si $p(x), q(x)$ son polinomios de grado n y m respectivamente, entonces:

$$L(p \cdot q) = L(p) \cdot q + p \cdot L(q)$$

(b) Pruebe por inducción sobre n, que si $p(x) = (x-d)^n$, entonces $L(p)(x) = n \cdot (x-d)^{n-1}$.

(c) Si $\alpha$ es una raíz de multiplicidad $m$ de un polinomio $p(x)$, $\alpha \in I\!R$, $m \geq 2$, entonces $\alpha$ es una raíz de multiplicidad $(m-1)$ del polinomio L(p)(x).

9. (a) Se sabe que $1+i$ es una raíz de $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$. Determine las otras raíces de p(x).

(b) Sea $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$. Sean $x_i$ con $i = 1, 2, ..., n$ las raices del polinomio p(x). Determine las raices del polinomio $g(x) = a_0 \mu^n x^n + a_1 \mu^{n-1} x^{n-1} + ... + a_{n-1}\mu x + a_n$ con $\mu \in I\!R \backslash \{0\}$.

(c) Determine las raíces del polinomio :

$$16x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 8x + 10$$

10. En este problema demostraremos el llamado Teorema de Interpolación.

Sea $K$ cuerpo, $n \in I\!N \backslash \{0\}$, $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in K$, con $x_j \neq x_k$ si $j \neq k$. Entonces existe un único polinomio de grado menor o igual a $n-1$ en $K[x]$ tq $\forall\, j = 1, ..., n \quad p(x_j) = y_j$.

Llamemos a este polinomio, polinomio de interpolación de la familia $\left(\{x_j\}_{j=1}^n \ , \ \{y_j\}_{j=1}^n\right)$

(a) Suponiendo la existencia de p(x), demuestre la unicidad.

(b) Para cada $j = 1, ..., n$ definimos:

$$l_j(x) = \frac{\prod_{k=1\,(k\neq j)}^n (x - x_k)}{\prod_{k=1\,(k\neq j)}^n (x_j - x_k)} \in K[x]$$

i. Determine el grado de $l_j(x)$ y pruebe que :

$$l_j(x_r) = \delta_{jr} = \begin{cases} 1, & j = r \\ 0, & j \neq r \end{cases} \qquad \forall\, j, r = 1, ..., n$$

ii. Demuestre que $p(x) = \sum_{j=1}^n y_j l_j(x) \in K[x]$ es polinomio de interpolación para la familia $\left(\{x_j\}_{j=1}^n \ , \ \{y_j\}_{j=1}^n\right)$.

11. Sea $J_2 = \{p(x) \in P(x) / \ gr(p) \leq 2, \ a_0 = 0, \ a_1 \neq 0\}$. En $J_2$ se define la l.c.i. $\triangle$ a través de $p(x) \triangle q(x) = \sum_{i=1}^2 c_i x^i$ en que $p(q(x)) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$.

(a) Probar que $(J_2, \triangle)$ es un grupo no abeliano.

(b) Sea $f : J_2 \longrightarrow I\!R\backslash\{0\}$ tq $f(a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) = a_1$. Probar que $f$ es un homomorfismo epiyectivo de $(J_2, \triangle)$ en $(I\!R\backslash\{0\}, \cdot)$.

(c) Sea $H = \{p(x) \in J_2/a_1 = 1\}$. Probar que $(H, \triangle)$ es subgrupo abeliano de $(J_2, \triangle)$.

12. Sea $n > 2$, sea $a = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ y sean $X, Y \in M_{nn}(\mathbb{C})$ las matrices definidas por $(X)_{jk} = a^{(j-1)(k-1)} \qquad (Y)_{jk} = a^{-(j-1)(k-1)}$.

   (a) Calcular $X^2$.

   (b) Calcular $XY$.

13. Sea $n \in I\!N$, $n \geq 2$ fijo.

   (a) Demuestre que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es igual a cero.

   (b) Demuestre que las raíces n-ésimas de un número complejo cualquiera $Z \in \mathbb{C}$, son el producto se una raíz particular $z_0 \in \mathbb{C}$ por una raíz n-ésima de la unidad.

   (c) Concluya que la suma de las raíces n-ésimas de un complejo cualquiera, es igual a cero.

14. Sea $I$ un subgrupo del grupo de los polinomios $I\!R[x]$. Sea $A = \{g(x) \in I/gr(g(x)) \geq 0\}$. Supongamos que I es tal que

   - $I \neq \{0\}$.
   - $(\forall p \in I) \qquad (\forall q \in I\!R[x]) \qquad p \cdot q \in I$.

   Probar que $(\forall g \in I) \qquad (\exists f \in A) \qquad f|g$.

15. Sean $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p(x)) \geq 4$, $a, b, c \in I\!R$, con $b \neq 0$. Se sabe que :

   - El resto de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)$ es $cx$.
   - El resto $r(x)$, de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)(x - a)$ es un polinomio "mónico", es decir, el coeficiente asociado a $x^n$, donde $n = gr(r(x))$, es igual a 1.

   (a) Determine los valores $p(b)$ y $p(-b)$.

   (b) Justifique que $gr(r(x)) \leq 2$.

   (c) Determine $r(x)$

16. Sea $\alpha$ una raíz séptima de la unidad distinta de 1. Pruebe que :

   (a) $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$.

   (b) $\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha^6} = -2$.

17. (a) Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ función. Se dirá que $f$ es lineal afín si $\exists\, a, b \in \mathbb{Q}$ $a \neq 0$, tal que $f(x) = a \cdot x + b$ $\forall x \in \mathbb{Q}$. Sea

$$I = \{f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \ \textit{función}/f \ \textit{es lineal afín}\}.$$

Probar que $(I, \circ)$ es un grupo, donde $\circ$ es la composición de funciones.

(b) Considere $(\mathbb{Q}, +), ((\mathbb{Q} \backslash \{0\}), \cdot)$. En $(\mathbb{Q} \backslash \{0\}) \times \mathbb{Q}$ se define la siguiente l.c.i.

$$(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b + a \cdot d)$$

Probar que $((\mathbb{Q} \backslash \{0\}) \times \mathbb{Q}, *)$ es un grupo.

(c) Demuestre que $((\mathbb{Q} \backslash \{0\}) \times \mathbb{Q}, *)$ es isomorfo a $(I, \circ)$.

18. Sea $(E, *)$ una estructura algebraica y sea $R$ una relación de equivalencia en $E$ que satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \ \in E) \qquad x_1 R x_2 \wedge y_1 R y_2 \Rightarrow (x_1 * y_1) R (x_2 * y_2).$$

Definimos una nueva l.c.i. $\otimes$ en el conjunto cuociente $E/R$ mediante:

$$[x] \otimes [y] = [x * y].$$

(a) Justifique que $\otimes$ está bien definida, es decir pruebe que la clase de $x * y$ no depende de los representantes de [x] y de [y] que se escojan.

(b) Muestre que si $(E, *)$ es un grupo, entonces $(E/R, \otimes)$ también es un grupo.

19. (a) Considere el subconjunto de los números complejos $H = \{a + bi / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

i. Pruebe que $(H, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad sin divisores del cero.

ii. Pruebe que los elementos invertibles de $H$ con respecto a la multiplicación son $1, -1, i, -i$.

iii. Demuestre que un número primo $x$ se puede escribir como producto $x = z_1 \cdot z_2$, donde $z_1$ y $z_2$ son elementos no invertibles con respecto a la multiplicación en $H$, sí y sólo sí $x = a^2 + b^2$ con $a, b \in \mathbb{N}$

(b) Sea $n \geq 2$. Probar que las raíces en $\mathbb{C}$ de $p(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$ son las raíces n-ésimas de la unidad distintas de uno.

20. (a) Sea $p \in K[x]$ un polinomio de grado 2 o 3. Demuestre que $p$ es irreducible sí y sólo sí $p$ no tiene raíces en $K$.

(b) Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ y $a \in \mathbb{C}$ una raíz de $p$. Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, se define el polinomio $D(p)$ tal que $D(p)(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Se sabe que si $p, q \in \mathbb{C}[x]$ entonces $D(p \cdot q)(x) = D(p)(x)q(x) + p(x)D(q)(x)$. Probar que $D(p)(a) = 0$ sí y sólo sí $(x-a)^2$ divide a $p(x)$.

21. (a) Sea $f : (A, *) \to (B, \Delta)$ un morfismo.
    i. Probar que $\Delta$ es una ley de composición interna en $f(A)$.
    ii. Probar que $(f(A), \Delta)$ es un grupo si $(A, *)$ es un grupo.

    (b) Considere la operación definida en $\mathbb{Z}$ por $n * m = n + m - 1$. Pruebe que $(\mathbb{Z}, *)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ son isomorfos.

22. (a) Sea $(\mathcal{G}, *)$ un grupo y $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$ para cada $g \in \mathcal{G}$ (recordar que $g^{-1}$ es el inverso de $g$ para la operación $*$). Probar que

$$f \text{ es un isomorfismo } \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ es un grupo Abeliano.}$$

    (b) Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación definida por $(a, b) \oplus (\bar{a}, \bar{b}) = (a +_2 \bar{a}, b +_3 \bar{b})$.
    i. Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es un grupo.
    ii. Construya un isomorfismo

$$f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus) \text{ tal que } f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3).$$

    Concluya que es único.

23. (a) Sea $(G, *)$ un grupo que verifica la propiedad $\forall\, a, b \in G,\ (a * b)^2 = a^2 * b^2$. Probar que $(G, *)$ es un grupo Abeliano.

    (b) Sean $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \exists\, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, f(x) = ax + b\}$ y $\bar{G} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \exists\, b \in \mathbb{R}, f(x) = x + b\}$. Sabiendo que $(G, \circ)$ es un grupo, probar que $(\bar{G}, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

24. (a) Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación $z^n = -1$ para $n \geq 2$.

    (b) Pruebe que la suma de las soluciones obtenidas en la parte $i$ es cero.
    Indicación: Recuerde que $\sum\limits_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$ si $r \neq 1$.

    (c) Pruebe que $\frac{(1+i)^{24}}{(1-i)^{20}} = -4$

25. (a) Calcule las raíces de $z^2 = -i$ y expréselas de la forma $a + bi$.

    (b) Si $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha).$$

(c) Pruebe que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.

26. (a) Sea $p(X) = X^3 + a\ X^2 + b\ X +\ c$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $r(X)$ el resto de la división de $p(X)$ por $(X-1)$. Si $r(4) = 0$ y $X = i$ es raíz de $p(X)$, calcule $a, b, c$.

    (b) Sea $p(X) = a_0 + a_1\ X + .... + a_{n-1}\ X^{n-1} + X^n$, con $a_0, ...., a_{n-1} \in \mathbb{C}$, tal que $p(X)$ tiene $n$ raíces distintas en $\mathbb{C}$ y si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de $p(X)$ entonces su conjugado $\bar{z}$ también lo es. Demuestre que $a_0, ...., a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

    *Indicación: estudie el producto de polinomios $(X - z)(X - \bar{z})$ donde $z \in \mathbb{C}$.*

27. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro $e \in G$ y

$$A = \{F : G \to G \ /\ F \text{ es un isomorfismo de } (G, *) \text{ en } (G, *)\}.$$

    (a) Probar que $(A, \circ)$ es un grupo ($\circ$ es la composición de funciones).

    (b) Para cada $g \in G$ se define la función $F_g : G \to G$ tal que $F_g(x) = g * x * g^{-1}$ en cada $x \in G$. Pruebe que:

    i. $F_g$ es un homomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

    ii. $F_{g*h} = F_g \circ F_h$, para todo $g, h \in G$.

    iii. $F_e = Id$ ($Id$ es la función identidad en $G$).

    Concluya que $F_g$ es un isomorfismo y que $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.

    (c) Pruebe que $B = \{F_g \ /\ g \in G\}$ es un subgrupo de $(A, \circ)$.

28. (a) Sea $(G, *)$ un grupo Abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de $G$. Se define el conjunto

$$H * K = \{h * k \ /\ h \in H, k \in K\}$$

    Probar que $H * K$ es un subgrupo de $G$.

    (b) Sea $(G, *)$ un grupo tal que para cada $g \in G$ existe $n \geq 1$ tal que $g^n = g * ... * g$ ($n$-veces) $= e$ (el neutro de $G$). Probar que el único homomorfismo $F : (G, *) \to (\mathbb{Z}, +)$ es la función constante $F(g) = 0$ en cada $g \in G$.

    (c) Sea $(G, *)$ un grupo que satisface la propiedad $a * a = e$ (el neutro del grupo) en cada $a \in G$, es decir, el inverso de cada elemento del grupo es el mismo elemento. Pruebe que $G$ es un grupo Abeliano. (Ind: calcule $(a * b) * (b * a)$).

29. (a) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+(\bar{z})^n},$$

    (donde $\bar{z}$ es el conjugado de $z$) es un número real.

    (b) Exprese en forma $a + bi$ las raíces cuartas de $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ (es decir, resuelva $z^4 = z_0$)

(c) Sean $z_1$ y $z_2$ complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Pruebe que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si y sólo sí $z_1 = z_2$. (Indicación: Pruebe que $|z| = 1$ y $Re(z) = 1$ si y sólo sí $z = 1$.)

30. Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ y $(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

    (a) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es una anillo conmutativo con unidad.

    (b) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ posee divisores del cero.

    (c) Se dice que $(R_\triangle, \mathbin{\triangle\!\!\!\!+}, \triangle)$ y $(R_\Diamond, \mathbin{\Diamond\!\!\!\!+}, \Diamond)$ son isomorfos si existe $\varphi : R_\triangle \to R_\Diamond$ biyección tal que

    $$\forall x, y \in R_\triangle, \quad \varphi(x \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} y) = \varphi(x) \mathbin{\Diamond\!\!\!\!+} \varphi(y) \ \text{ y } \ \varphi(x \triangle y) = \varphi(x) \Diamond \varphi(y).$$

    Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ no es isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.