POLINOMIOS
(Versión Preliminar)

Estas notas deben ser complementadas con ejercicios de la guía o de algun texto.

En esta sección denotaremos por N al conjunto de los números naturales incluido el cero. Es decir $N = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n.......\}$.

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

donde $n \in N$ y $a_j \in R$ para $j = 1, 2, ..., n$. Si $a_n \neq 0$, n se llama el **grado** del polinomio y se denota $n =$ **grad**$(p(x))$. Los reales a_j, para $j = 1, 2, ..., n$, se denominan los **coeficientes**. El polinomio que tiene todos sus coeficientes igual a cero se denomina el polinomio 0. Diremos que el polinomio 0 tiene grado $-\infty$.

Dos polinomios

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

y

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$$

con $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$ son iguales si y solamente sí $n = m$ y $a_j = b_j$ para todo $j = 0, 1, ..., n = m$.

Los polinomios se pueden sumar, multiplicar por un real y multiplicarse entre ellos según las reglas que Ud. conoce.

Ejercicio: Calcular

a)
$$(7x^3 - 2x^2 + x - 1) - (9x^3 + 3x^2 - 2x + 3).$$

b)
$$(7x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1)(9x^5 + x^2 - x + 3).$$

Ejercicio:

a)
$$\text{grad}(p(x)q(x)) = \text{grad}(p(x)) + \text{grad}(q(x)).$$

b)
$$\text{grad}(p(x)+q(x)) \leq \max\{\text{grad}(p(x)), \text{grad}(q(x))\}.$$

El algoritmo de la división.

Repasemos algunos conceptos de los números naturales.

Si $p, s \in N$, con $s \neq 0$, se dice que s **divide a** p si y sólo sí existe $q \in N$ tal que $p = s \cdot q$.

Por ejemplo:

a) 2 divide a 16 ya que $16 = 2 \cdot 8$.

b) 7 divide a 105 ya que $105 = 7 \cdot 15$.

También existe la **división con resto**. Como ejemplo tenemos que 7 cabe 15 veces en 107 y sobran 2, es decir
$$107 = 7 \cdot 15 + 2.$$

Mas en general, dados dos naturales p y $s \neq 0$ siempre existen naturales q, denominado el cuociente, y r, denominado el resto, de modo que
$$p = s \cdot q + r$$
con $0 \leq r \leq s-1$.

Observamos que el hecho de pedir que el resto cumpla con $0 \leq r \leq s-1$ hace que, dado s, la descomposición de p en la forma
$$p = s \cdot q + r$$
sea única. Demuéstrelo.

Observamos que en el caso $p < s$ la descomposición toma la forma
$$p = s \cdot 0 + p,$$
es decir p es su propio resto. Por ejemplo $7 = 9 \cdot 0 + 7$.

Pasemos ahora al ambiente de los **polinomios**:

Si $p(x)$ y $s(x) \neq 0$ son dos polinomios se dice que $s(x)$ **divide a** $p(x)$ si y sólo sí existe un polinomio $q(x)$ tal que $p(x) = s(x)q(x)$.

Por ejemplo:

a) $x-1$ divide a x^2-1 ya que $x^2-1=(x-1)(x+1)$.
b) Compruebe que $x+1$ divide a x^4-1.

También en este caso existe la **división con resto**:

Dados dos polinomios $p(x)$ y $s(x)\neq 0$ siempre existen polinomios $q(x)$, denominado el **cuociente**, y $r(x)$, denominado el **resto**, de modo que

$$p(x)=s(x)q(x)+r(x)$$

con $\operatorname{grad}(r(x))\leq \operatorname{grad}(s(x))-1$.

La manera de obtener los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ una vez dados $p(x)$ y $s(x)\neq 0$, que se llama el algoritmo de la división, ha sido recordada en clases.

Observamos que el hecho de pedir que el resto cumpla con $\operatorname{grad}(r(x))\leq \operatorname{grad}(s(x))-1$ hace que, dado $s(x)$, la descomposición de $p(x)$ en la forma

$$p(x)=s(x)q(x)+r(x)$$

sea única. Demuéstrelo.

Observamos que en el caso $\operatorname{grad}(p(x))< \operatorname{grad}(s(x))$ la descomposición toma la forma

$$px=s(x)0+p(x),$$

es decir $p(x)$ es su propio resto. Por ejemplo $x^2+1=(x^3-1)0+(x^2+1)$.

También hacemos notar que $s(x)\neq 0$ divide a $p(x)$ si y sólo sí al dividir $p(x)$ por $s(x)$ el resto resultante es 0.

Evaluación y raices.

Sea

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+a_1x+a_0$$

un polinomio y sea $\alpha\in R$. La evaluación de $p(x)$ en α es el número real

$$p(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+a_1\alpha+a_0.$$

Ejercicio:

a) Si $p(x)=3x^3-7x^2+5x-2$ y $\alpha=2$, calcular $p(\alpha)$.

b) Si $p(x) = 3x^6 - 2x^3 + 7$, calcular $p(1)$, $p(-1)$ y $p(2)$.

Un número real α se dice una **raiz** de un polinomio $p(x)$ si y sólo sí

$$p(\alpha) = 0.$$

Teorema del resto:

Sea $p(x)$ un polinomio y sea $\alpha \in R$. El resto que resulta de dividir $p(x)$ por el polinomio $(x - \alpha)$ es $p(\alpha)$.

Demostración: Por el algoritmo de la división

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + r$$

donde $\text{grad}(r) = 0$ o $r = 0$. Evaluando en α se obtiene

$$p(\alpha) = r.$$

Corolario:

Un polinomio $p(x)$ es divisible por $(x - \alpha)$ si y sólo sí $p(\alpha) = 0$.

Ejemplo:

Sea $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. Se tiene $p(1) = 0$. Luego $p(x)$ es divisible por $x - 1$. En efecto, por el algoritmo de la división se tiene

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1).$$

Un polinomio $p(x)$ se dice **reducible (sobre los reales)** si existen dos polinomios $q(x)$ y $s(x)$ no costantes, es decir de grado mayor o igual a 1, tales que

$$p(x) = q(x)s(x).$$

Observamos que en este caso $\text{grad}q(x) < \text{grad}p(x)$ y $\text{grad}s(x) < \text{grad}p(x)$.

Ejemplo:

El polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ es reducible ya que

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1).$$

Un polinomio se dice **irreducible (sobre los reales)** si no es reducible.

Observación:
a) Todo polinomio de grado 1 es irreducible (sobre los reales). (Ya que en caso contrario cualquier factor debe tener grado 0 es decir debe ser constante.)
b) El polinomio de grado 2

$$Ax^2 + Bx + C$$

es irreducible si y sólo sí su discriminante $B^2 - 4AC$ es menor que 0. (Ya que en caso contrario cualquier factor debe tener grado 1 y por lo tanto el polinomio debería tener una raiz, lo que es imposible pues su discriminante es negativo.)

La demostración del teorema siguiente está mas allá de la materia de este curso.
Teorema:
Los únicos polinomios irreducibles (sobre los reales) son los polinomios de grado 1 y los polinomios de grado 2 con discriminante negativo.

Del teorema precedente y del algoritmo de la división se deduce el siguiente
Teorema:
Todo polinomio $p(x)$ con coeficientes reales se factoriza en la forma

$$p(x) = C(x - \alpha_1) \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_n) p_1(x) \cdot \cdots \cdot p_m(x)$$

donde $p_1(x), \cdots, p_m(x)$ son polinomios de grado 2 con discriminante negativo, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son las raices de $p(x)$ y C es una constante.
Observación: Por supuesto en dicha factorización pueden aparecer sólo polinomios de grado 1 como también solamente polinomios de grado 2.

Búsqueda de raices racionales.

El problema de encontrar todas las raices reales de un polinomio es imposible de resolver aunque este las tuviera. Sin embargo es posible, en teoía, encontrar sus raices racionales si el polinomio tiene coeficientes racionales. Multiplicando por un múltiplo de todos los denominadores de los coeficientes del polinomio el problema se reduce a polinomios con coeficientes enteros. Luego consideremos un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + \text{........} + a_0$$

con $a_j \in Z$ para $j = 0, ..., n$ y con $a_n \neq 0$. Podemos suponer $a_0 \neq 0$, pues en caso contrario $\alpha = 0$ es una raiz y podemos dividir el polinomio $p(x)$ por una potencia adecuada de x y reducir el problema a un polinomio con $a_0 \neq 0$. Ahora si el polinomio $p(x)$ tuviera una raiz racional α esta puede escribirse en la forma

$$\alpha = \frac{r}{s}$$

con $r, s \in Z$ relativamente primos, es decir con r y s sin factores enteros distintos de 1 comunes. Como $p(\alpha) = 0$ se tiene

$$a_n(\frac{r}{s})^n + ... + a_0 = 0.$$

Multiplicando la expresión anterior por s^n se obtiene

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + ... + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0.$$

Ahora r divide a $a_n r^n$, como también a $a_{n-1} r^{n-1} s$, ... , y también a $a_1 r s^{n-1}$. Por lo tanto r divide a $a_0 s^n$. Como r y s no tienen factores comunes se tiene que

r **divide a** a_0.

Analogamente

s **divide a** a_n.

Ejemplo: Factorizar

$$p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 3x - 2.$$

Si $\alpha = \frac{r}{s}$ fuera una raiz racional como arriba se debe tener que r divide a 2. Es decir

$$r = 2, -2, 1 \text{ ó } -1.$$

Por otra parte s divide a 2, por lo tanto

$$s = 2, -2, 1 \text{ ó } -1.$$

De este modo

$$\alpha = 2, -2, 1, -1, \frac{1}{2}, \text{ ó } -\frac{1}{2}.$$

Substituyendo estas seis posibilidades encontramos que

$$p(-2) = 0$$

y

$$p(\frac{1}{2}) = 0.$$

Ahora por el algoritmo de la división,

$$p(x) = (x+2)(x-\frac{1}{2})(x^2+1).$$

Esta es toda la factorización posible sobre los reales ya que x^2+1 es irreducible.