Valor Absoluto

Definición

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Propiedades

Para todos $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ se cumple:

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| \geq x$.
3. $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$.
4. $y > 0 \rightarrow \big(|x| = y \leftrightarrow (x = y \vee x = -y)\big)$.
5. $y > 0 \rightarrow \big(|x| < y \leftrightarrow (-y < x < y)\big)$.
6. $y > 0 \rightarrow \big(|x| > y \leftrightarrow (x < -y \vee y < x)\big)$.
7. $y > 0 \rightarrow \big(|x| \leq y \leftrightarrow (-y \leq x \leq y)\big)$.
8. $y > 0 \rightarrow \big(|x| \geq y \leftrightarrow (x \leq -y \vee y \leq x)\big)$.
9. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
10. $y \neq 0 \rightarrow |\frac{x}{y}| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
11. $|-x| = |x|$.
12. $-|x| \leq x \leq |x|$.
13. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demostración de algunas propiedades.

Nota: Se asume al demostrar una propiedad que las propiedades que aparecen antes que ella en la lista son verdaderas (y usables):

Nota: Como el valor absoluto es definido por casos, es preferible dividir el problema en los casos en que se pueda quitar el valor absoluto y quedarse con expresiones más conocidas.

Demostración de la propiedad 2:

Sea $x \in \mathbb{R}$.

- Supongamos que $x \geq 0$. Entonces $|x| = x$ por definición, y en particular se tiene que $|x| \geq x$.
- Supongamos que $x < 0$. Entonces $|x| = -x$ por definición, y en particular se tiene $|x| = -x > 0 > x$, es decir, $|x| \geq x$.

Q.E.D.

(Queda Entonces Demostrado)

Demostración de la propiedad 13:

Sea $x \in \mathbb{R}$. Por propiedad 2 se sabe que $x \leq |x|$ y que $y \leq |y|$, y por propiedades de orden se obtiene $x + y \leq |x| + |y|$.

Por otra parte, por propiedad 12 se obtiene que $x \geq -|x|$ y que $y \geq -|y|$, lo que implica que $x + y \geq -(|x| + |y|)$.

Se tiene entonces que $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, lo que junto a $0 \leq |x| + |y|$ y propiedad 7 implica que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Q.E.D.