PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2001

MAT 1408- GUIA N°4

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ x^3 & si\ x < 0 \end{cases}$$

   (a) Graficar f si $x \geq 0$.
   (b) Determine si f es inyectiva.
   (c) Hallar Rec f.

2. Si $f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

   (a) Determine si f es inyectiva.
   (b) Hallar Rec f.

3. Si $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3 + \sqrt{x+2}$

   (a) hallar Rec f
   (b) si $g : [-3, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = (x-2)^2 + 1$.

   Determine las funciones $f + g$, $f \cdot g$.
   (c) graficar la funci'on g.
   (d) decidir si g es 1-1.

4. Si f y g son funciones biyectivas ¿que puede decir de $f + g$, $f - g$, etc?

5. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}_0^-$ tal que $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(2x^2 - x - 1)(3x^2 + x + 1)}$.

   Determine el m'aximo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de modo que f sea una funci'on

   (Soluci'on: $A =]-\infty, -1\,] \cup]-1/2, 1\,[$.)

6. Si $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$. Decidir si f es 1-1.

7. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ 1-x & x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que f no es 1-1.

8. Si $f : [\,-2, 0\,] \longrightarrow [\,0, 1\,]$ tal que $f(x) = 1 - \sqrt{-x^2 - 2x}$

   (a) Hallar Rec f.

   (b) Determine si f es epiyectiva.

   (Soluci'on: Si f es epiyectiva)

9. Si $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ $g : [-3, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - \sqrt{x+3}$

   Defina fog y gof.

   (Soluci'on: $(fog)(x) = \dfrac{1+\sqrt{x+3}}{3-\sqrt{x+3}}$)

10. Si $f : [-7, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \mid x+3 \mid -2$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = 1 + x^2$

    Determine gof y fog.

11. Decidir si gof del ejercicio anterior es o no biyectiva.

12. En cada caso verificar que la funci'on dada es biyectiva y determine su inversa.

    (a) $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow]-\infty, 8]$, $f(x) = 8 - \sqrt{x}$

    R: $f^{-1}(x) = (8-x)^2$

    (b) $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^-$, $f(x) = -x^2$

    R: $f^{-1}(x) = \sqrt{-x}$

(c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-\infty,\, 1/2],\cup]\,1,\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>0 \\ x+1/2 & x \leq 0 \end{cases}$$

R: $f^{-1} :]-\infty,\, 1/2] \cup]1,\, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

y tal que $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-1} & y>1 \\ y-1/2 & y \leq 1/2 \end{cases}$

(d) $f : \mathbb{R}^- \longrightarrow [-5,\, -3[\cup[2,\, \infty[$

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq -2 \\ -x-5 & -2 < x \leq 0 \end{cases}$$

R: $f^{-1} : [-5,\, -3[\cup[2,\, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^-$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -5-x & \text{si } -5 \leq x < -3 \\ -x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(e) $f : [4,\, \infty[\longrightarrow [-1,\, \infty[$, tal que $f(x) = \sqrt{x} - 3$

R: $f^{-1} : [-1,\, \infty[\longrightarrow [4,\, \infty[,\ f^{-1}(x) = (x+3)^2$

13. Determine B para que f sea epiyectiva, y verifique que adem'as f es $1-1$. Determine su inversa

(a) $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow B$
$x \rightsquigarrow 2 - \sqrt{x+1}$

R: $B =]-\infty,\, 1]$

(b) $f :]-7,\, -1] \longrightarrow B$
$x \rightsquigarrow 2 - x^2$

R: $B = Rec\, f =]-47,\, 1]$
f no es $1-1$

14. Sea f definida por $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Probar que f es biyectiva y encontrar f^{-1}.

15. Dada la función $f : \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ tal que $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

a) Demuestre que f es biyectiva b) Determine f^{-1}

16. Dada las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$.

    (a) Encuentre $fog(4)$, $gof(4)$ y $fof(4)$.

    (b) Demuestre que, en general, $fog(x) \neq gof(x)$.

    (c) ¿Existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $fog(x) = gof(x)$?

17. Dadas las funciones reales de variable real definidas por:

    $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

    Demuestre que $fog = gof$.

18. Dadas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x^2 + 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x - 3$, para qué valor de x se tiene $fog(x) = gof(x)$.

19. Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ son funciones tales que gof es epiyectiva, entonces g es epiyectiva.

20. Sea $f(x) = \frac{1}{1-x}$ con $x \neq 1$. Calcule $fofof$.

21. Dadas $f, g = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y $g(x) = 3x - 4$, determine: fog, gof, $g^{-1}of$, fog^{-1}, $fogog$

22. Si f y g son funciones definidas por:

    $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si} \quad x > 0 \\ x + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si} \quad x > 3 \\ x^3 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$

    Determine $g(f(x))$.

23. Dadas las funciones f, g, h definidas en $\mathbb{R}$, tales que $f(x) = \frac{x-1}{3}$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = \frac{2x-5}{4}$. Demuestre que son biyecciones. Deterine sus inversas. Calcule $(hofog)$ y $(h^{-1}of^{-1}og^{-1})$.

24. Sea $f : [-7, 0] \cup [1, 5] \to \mathbb{R}$, función tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 7) + 2 & -7 \leq x < -3 \\ 1 & -3 \leq x \leq 0 \\ (x - 3)^2 - 1 & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

    (a) Graficar f

    (b) Determine $Dom\ f$, $Rec\ f$

    (c) Calcule $f(1/2)$, $f(3)$, $f(1)$, $f(5)$

    (d) ¿f es función inyectiva? Justifique.

    (e) Haga las restricciones (mínimas) necesarias para que f sea una función biyectiva y determine f^{-1}.

25. Repetir lo mismo del ejercicio anterior pero con $f :]-3, 2] \cup]3, 7[\to \mathbb{R}$ y tal que

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & -3 < x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ x - 7 & 3 < x < 7 \end{cases}$$