PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
Primer semestre de 2001

MAT 110E Algebra
Ejercicios N° 2

1. Expresar cada uno de los productos siguientes como suma:

   (a) $\operatorname{sen} 3\theta \cos 5\theta$

   (b) $\cos 7\theta \cos 5\theta$

   (c) $\cos 7\theta \operatorname{sen} 5\theta$

   (d) $\cos\theta \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

2. Expresar cada una de las sumas siguientes como producto:

   (a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{9} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}$

   (b) $\cos 2\theta - \cos\theta$

   (c) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$

   (d) $\cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9}$

3. Demostrar las siguientes identidades:

   (a)
   $$\operatorname{sen}^4\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha\Big(1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}\Big) = 1 - \cos^4\alpha$$

   (b)
   $$\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\cot^2\alpha} = \Big(\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1-\cot\alpha}\Big)^2$$

   (c)
   $$\frac{1-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{(\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha)\cos\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$$

   (d)
   $$\operatorname{cosec}\alpha(\sec\alpha - 1) - \cot\alpha(1-\cos\alpha) = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha$$

   (e)
   $$(\sec\alpha - 1)^2 - (\operatorname{tg}\alpha)^2 = (1-\cos\alpha)^2$$

(f)
$$\frac{\mathrm{tg}^3\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{\cot^3\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\frac{1-2\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}$$

(g)
$$a=\cot\alpha \Rightarrow a+\frac{1}{a}=\sec\alpha\mathrm{cosec}\alpha$$

(h)
$$\mathrm{sen}^4\alpha(3-2\mathrm{sen}^2\alpha)+\cos^4\alpha(3-2\cos^2\alpha)=1$$

4. Demostrar las identidades:

   (a) $\mathrm{tg}\alpha+\cot\alpha=\sec\alpha\mathrm{cosec}\alpha$

   (b) $1-2\mathrm{sen}^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

   (c) $\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\mathrm{cosec}\alpha\sec\alpha=1$

   (d) $\dfrac{1}{1+\mathrm{sen}\alpha}+\dfrac{1}{1-\mathrm{sen}\alpha}=2\sec^2\alpha$

   (e) $\mathrm{tg}\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{1+\mathrm{sen}\alpha}=\sec\alpha$

   (f) $\cos^4\alpha-\mathrm{sen}^4\alpha=\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha$

   (g) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\cot\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\cot\alpha}=2\mathrm{sen}^2\alpha-1$

   (h) $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha$

   (i) $\mathrm{sen}\alpha\sec\alpha\cot\alpha=1$

   (j) $\cos\alpha+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{sen}\alpha=\sec\alpha$

5. Desde cada extremo de una base de longitud $2a$ la elevación angular de un monte es θ y desde el punto medio de tal base es ϕ. Demostrar que el monte mide:

$$a\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\sqrt{\mathrm{cosec}(\phi+\theta)\mathrm{cosec}(\phi-\theta)}\cdot$$

6. Una torre dista 40 metros desde la orilla más cercana de un río cuyo ancho es de 100 metros,Calcular la altura de la torre si desde la cúspide se observa el río bajo un ángulo de 30°.

7. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\mathrm{sen}\frac{\beta}{2}\mathrm{sen}\frac{\gamma}{2}\cdot$$

8. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \mathrm{sen}\alpha+\mathrm{sen}\beta+\mathrm{sen}\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cdot$$

9. Calcular

a) $sen\left(Arccos\dfrac{4}{5}\right)$

b) $cos\left(Arctg\dfrac{12}{5}\right)$

c) $sen\,(Arctg\,x)$ en términos de x.

d) $tan\,(Arcos\,x)$ en términos de x.

10. Resolver las ecuaciones:

a)
$$\operatorname{Arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}x$$

b)
$$\operatorname{Arctg}x+\operatorname{Arctg}(x-1)=\operatorname{Arctg}(-3)$$

c)
$$2\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{Arccos}\frac{3}{5}=\operatorname{Arcsen}\frac{1}{x}$$

d)
$$\operatorname{Arctg}x=2\operatorname{Arccos}\frac{1}{2}x$$

11. Resolver las ecuaciones:

a)
$$\mathrm{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b)
$$\mathrm{tg}\theta=\sqrt{3}$$

c)
$$\mathrm{tg}^2\theta=\frac{1}{3}$$

d)
$$\cot\theta=-\sqrt{3}$$

e)
$$\sec^2\theta=\sec^2\alpha$$

f)
$$\cos 3\theta=\cos 2\theta$$

12. Resolver los sistemas:

a)
$$\left.\begin{array}{rcrcr}\mathrm{tg}x & + & \mathrm{tg}y & = & 2\\ 2\cos x & \cdot & \cos y & = & 1\end{array}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{array}{rcrcr}\mathrm{sen}x & + & \mathrm{sen}y & = & a\\ \cos 2y & - & \cos 2x & = & b\end{array}\right\}$$

c)
$$\left.\begin{array}{rcrcr}\mathrm{sen}x & + & \mathrm{sen}y & = & \mathrm{sen}\alpha\\ \cos x & + & \cos y & = & \cos\alpha\end{array}\right\}$$

d)
$$\left.\begin{array}{rcrcr}\mathrm{sen}x & + & \mathrm{sen}y & = & m\mathrm{sen}\alpha\\ \cos x & + & \cos y & = & m\cos\alpha\end{array}\right\}$$

13. Una escalera de 13,5 m. de longitud llega hasta la parte superior de un muro. Si la escalera forma un ángulo de 60° con el muro, hallar la altura de éste y la distancia a él desde el pie de la escalera.

14. Un asta de bandera está enclavada verticalmente en lo alto de un edificio; a 12 m. de distancia, los ángulos de elevación de la punta del asta y de la parte superior del edificio son de 60° y 30° respectivamente. Hallar la longitud del asta.

15. Desde la cúspide de un monumento de 30 m. de altura, los ángulos de depresión de dos objetos, que están sobre el terreno en la direcciónn oeste del monumento son de 45° y 30° respectivamente. Hallar la distancia que los separa.

16. Mirando hacia el sur desde la parte superior de un acantilado, los ángulos de depresión de una roca y de una boya se observa que son de 45° y 60°. Si se sabe que estos objetos están separados 110 m. hallar la altura del acantilado.

17. Desde lo alto de un acantilado de 1500 m. de altura los ángulos de depresión de dos embarcaciones que están situadas al sur del observador son de 25° y 85° respectivamente. Hallar la distancia entre esas embarcaciones.

18. Una torre está al pie de una colina cuya inclinación con respecto al plano horizontales de 9°. Desde un punto de la colina 12 m. más arriba la torre subtiende un ángulo de 54°, hallar la altura de la torre.

19. Una lámina rectangular $ABCD$ descansa con sus vértices A y B sobre un ángulo recto EOA. El lado AB forma un ángulo θ con la recta horizontal OA. Calcular $EC = x$ y $CF = y$ en términos de θ y usar estos resultados para probar que:

$$5x^2 - 4xy + y^2 = 1 \ .$$

20. Una torre de altura h se encuentra al norte de un punto A y al oeste de un punto B. En A y B los ángulos de elevación de la parte más alta de la torre son α y β, respectivamente. Si $AB = c$, demostrar que:

$$h = \frac{c}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta}} \ .$$

21. La altura de una colina es de 990 m. sobre el nivel de un plano horizontal. Desde un punto A de dicho plano la elevación angular de la cima de la colina es de 60°. Un globo se eleva desde el punto A y asciende verticalmente con rapidez uniforme; después de 5 minutos , para un observador que está en el globo, la elevación angular de la cima de la colina es de 30°. Hallar la rapidez de ascención del globo en [km./h.].

22. Dos chimeneas AB y CD tienen la misma altura. Una persona que está entre ellas en la recta AC que une sus bases observa que la elevación de la más cercana es de 60°. Después de caminar 24 m. en una dirección perpendicular a AC observa que las elevaciones son de 45°a la más cercana y 30°a la otra. Hallar la altura de las chimeneas y la distancia que las separa.

23. Se tiene un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r. Demostrar que el perímetro y el área de este polígono son, respectivamente:

$$2nr\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{n} \quad , \quad \frac{1}{2}nr^2\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n} \ .$$

24. Dados $z_1 = (-3, 4)$, $z_2 = (5, 1)$, calcular $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1^{-1}, z_2^{-1}.

25. Dados $z_1 = (5, 4)$, $z_2 = (5, 6)$ calcular $\frac{z_1}{z_2}$.

26. Expresar en la forma $x + iy$ el complejo $\frac{(3+5i)(2-i)^3}{-1+4i}$.

27. Calcular el módulo del complejo $z = \frac{(2-3i)^4(1-i)^3}{5+i}$.

28. Hallar un complejo z tal que $\mid z \mid = \frac{1}{\mid z \mid} = \mid 1 - z \mid$.

29. Hallar un complejo z tal que $z^{-1} + 2(\overline{z})^{-1} = 1 + i$.

30. Expresar en su forma polar los complejos $-\sqrt{3} + i$ y $3 - 4i$.

31. Demostrar que $\overline{(cis\theta)} = cis(-\theta)$ y $cis(\theta_1 - \theta_2) = \frac{cis\theta_1}{cis\theta_2}$.

32. Determinar el módulo y el argumento del complejo $z = \cos\theta + i\text{sen}\theta - 1$.

33. Expresar en forma polar el complejo $z = (\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta) + i(\cos\alpha - \cos\beta)$.

34. Demostrar que:
$$\text{Arctg}\,\frac{4}{3} - \text{Arctg}\,\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}\ .$$

35. Determinar las raíces cuadráticas del complejo $8 - 15i$.

36. Resolver la ecuación $9z^2 + 6(4-3i)z - (1+9i) = 0$.

37. Demostrar que si la ecuación $z^2 + (a+bi)z + (c+di) = 0$ (a, b, c, $d \in R$)tiene dos soluciones iguales, entonces $a^2 - b^2 = 4c$, $ab = 2d$.

38. Demostrar que las raíces cúbicas de $z_0 = 4(1 + i\sqrt{3})$ tienen suma nula.

39. Resolver la ecuación cúbica $3x^3 - 46x^2 + 835x + 578 = 0$ sabiendo que tiene una raíz compleja de módulo 17.

40. Calcular: $\sqrt[6]{i-1}$, $\sqrt[5]{i-\sqrt{3}}$, $\sqrt[8]{1}$, $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$.

41. Demostrar que:
$$\forall n \in N\ \left((1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos n\frac{\pi}{4}\right)\ .$$

42. Resolver la ecuación:
$$z^{16} - 2z^8\cos 8\alpha + 1 = 0\ .$$

43. Colocando $z = e^{i\alpha}$ en la identidad:
$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}\ ,$$
demostrar que:
$$1 + 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + 2\cos 3\alpha + \cdots + 2\cos(n-1)\alpha = \frac{\text{sen}(n-\frac{1}{2})\alpha}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}\ ,$$
$$\text{sen}\alpha + \text{sen}2\alpha + \text{sen}3\alpha + \cdots \text{sen}(n-1)\alpha = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(n-\frac{1}{2})\alpha}{2\text{sen}\frac{\alpha}{2}}\ .$$

44. Determine los valores de $k \in R$ de modo que al dividir $x^4 - k^3x + 3 - k$ por$(x - 3)$ resulte 44 como resto.

45. Determine los valores de a, $b \in R$ de modo que a $ax^4 + bx^3 - 12x^2 + 21x - 5$ sea divisible por$2x^2 + 3x - 1$.

46. Demuestre que si el polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ admite $(x - 1)$ como factor, entonces $b = d - 2a$ y $c = a - 2d$.

47. Resuelva la ecuación $x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ sabiendo que i es una raiz.

48. Resolver $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0$.

49. Determine k de modo que lars raices del polinomio $2x^3 + 6x^2 + 5x + k$ sean reales que esten en progresión aritmética.

50. Determine k de modo que lars raices del polinomio $8x^3 + 18x^2 - kx - k$ sean reales que esten en progresión geométrica.

51. Sabiendo que $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$ son raices de $4x^4 + ax^3 + bx^2 + 5x - 4$. Encontrar las otras raices.

52. Determine las raices racionales de

    a) $5x^3 - 3z^2 - 55x + 33$

    b) $x^4 + 2x^3 + 11x^2 - 2x - 3$

53. Al dividir el polinomio $p(x)$ por $(x - 1)$ el resto es a y al dividirlo por $(x - 2)$ es b. Encuentre el resto que resulta al dividirlo por $(x - 1)(x - 2)$.

54. Determine los valores de $k \in R$ para que el polinomio $2k^2x^3 + 3kx^2 - 2$ sea divisible por $(x - 1)$ y tenga sólo raices reales.