MA-11A Álgebra 12 de Marzo, 2001

Lista de Potenciales Ejercicios Semestre 1

1 Lógica y Conjuntos

Problema 1 Sean p, q y r proposiciones. Demostrar con y sin tablas de verdad que las siguientes proposiciones son tautologías:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (p \wedge q) \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)] \\ \text{(ii)} & (p \wedge q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q) \\ \text{(iii)} & (p \wedge q) \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]. \end{array}$$

Problema 2 Sean p y q proposiciones. Se define la proposición "ni q ni p", la que denotamos por $p \downarrow q$, por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(i) Probar que $\sim p \Longleftrightarrow (p \downarrow p)$ y que $(p \vee q) \Longleftrightarrow \sim (p \downarrow q)$.
(ii) Expresar las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $q \wedge p$ usando sólo $\downarrow$ y $\sim$.

Problema 3 Sean A, B, C conjuntos. Usar los teoremas del álgebra de conjuntos para probar que:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (A \cap C = \emptyset) \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C) \\ \text{(ii)} & A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B \\ \text{(iii)} & (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \cup (A \Delta C) \end{array}$$

Problema 4
(i) Sean p, q, r proposiciones.

(i.1) Construir la proposición compuesta "s" (en función de p, q, r) cuya tabla de verdad es:

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

(i.2) Probar que $s \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ es una tautología.

(ii) Sean A, B, C conjuntos. Probar que $A \subseteq C \Longrightarrow A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$.

Problema 5 Sea A un subconjunto fijo del conjunto E y sea $M = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \cap X = \emptyset\}$. Probar que:
(i) $\emptyset \in M$ y $E \setminus A \in M$.
(ii) $A \in M \Longleftrightarrow A = \emptyset \Longleftrightarrow M = \mathcal{P}(E)$.
(iii) $(\forall X \in M)(\forall Y \in \mathcal{P}(E)) X \cap Y \in E$.
(iv) $[(X \in M) \wedge (Y \in M)] \Longrightarrow [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in M$.

Problema 6
(i) Sean A y X conjuntos. Demostrar que $[(A \cup X) \setminus (A \Delta X)] \cup [(A \cup X) \setminus A] = X$.
(ii) Dados A, B, C conjuntos, aprovechar el resultado entregado en (a) para determinar un conjunto X tal que $(A \Delta X = B)$ y $(A \cup X = C)$.
(iii) Probar que en el caso $B = C$ el conjunto X es disjunto con A.

2 Funciones

Problema 1 Sea $f : E \to F$ una función. Se dice que $A \subseteq E$ es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$.
(i) Probar que si A y B son subconjuntos estables de E entonces A^c, $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son.
(ii) Probar que f es inyectiva sí y sólo sí todo subconjunto de E es estable.

Problema 2 Sean $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ dos funciones biyectivas. Definimos $\mathcal{F}_{A,A'} = \{h : A \to A' : h \text{ es una función}\}$ y $\mathcal{F}_{B,B'} = \{\overline{h} : B \to B' : \overline{h} \text{ es una función}\}$. Considere además la función $\psi : \mathcal{F}_{A,A'} \to \mathcal{F}_{B,B'}$ tal que a cada $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ le asocia $\psi(h) = g \circ h \circ f^{-1}$.
(i) Probar que ψ es una biyección.
(ii) Probar que h es inyectiva sí y sólo sí $\psi(h)$ es inyectiva.
(iii) Probar que h es sobreyectiva sí y sólo sí $\psi(h)$ es sobreyectiva.

Problema 3 Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función tal que $f(n + m) = f(n) + f(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.
(i) Probar que $f(0) = 0$.
(ii) Probar que $f(-m) = -f(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.
(iii) Pruebe que f es inyectiva sí y sólo sí $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Problema 4
(i) Probar que para todo A, B, C conjuntos se tiene,

(i.1) $A\Delta B = A\Delta C \Longrightarrow B = C$,
(i.2) $A\Delta B = C \Longrightarrow B = A\Delta C$.

(ii) Sea E un conjunto y A un subconjunto de E. Se define la función $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ como $f(X) = X\Delta A$. Probar que f es biyectiva y determine la función inversa de f.

3 Relaciones

Problema 1 Considere el conjunto $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$ de n-tuplas con componentes en los números naturales. Se define la relación $\mathcal{R}_1$ sobre $\mathbb{N}^n$ por:

$$x\mathcal{R}_1 y \iff x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

(i) Demuestre que $\mathcal{R}_1$ es una relación de orden parcial.
(ii) Sea $\mathcal{R}_2$ la relación de orden usual de n-tuplas, i.e.,

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^n, x\mathcal{R}_2 y \iff x_i \leq y_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Demuestre que $x\mathcal{R}_2 y \Rightarrow x\mathcal{R}_1 y$. Verifique que la implicancia en el otro sentido es falsa. Para ello construya un contraejemplo.

Problema 2 Considere el conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Se dice que $\alpha = \{B_1, B_2, \ldots, B_s\}$ es una partición de A si:

$$(1)\ B_i \neq \emptyset \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n, \quad (2)\ B_i \cap B_j = \emptyset \text{ para todo } i \neq j, \quad (3)\ A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Denotemos por $\mathcal{D}(A)$ al conjunto que contiene todas las particiones de A. Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{D}(A)$ por: $\alpha\mathcal{R}\alpha' \iff \forall B' \in \alpha', \exists B \in \alpha$ tal que $B' \subseteq B$.
(i) Probar que $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathcal{D}(A)$.
(ii) Probar que si $|A| \geq 3$, entonces la relación es de orden parcial.

Problema 3 Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función biyectiva. Denotaremos por f^{-1} a la inversa de f. Para $n \geq 1$ definimos $f^{(n)}$ como la composición de f con ella misma n veces y si $n < 0$ definimos $f^{(n)} = (f^{-1})^{(|n|)}$. Si $n = 0$ escribimos $f^{(0)} = id_A$.

Considere la relación en A definida por: $x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbb{Z}, f^{(n)}(x) = y$.

(i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
(ii) Considere $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fijo. Si $A = \mathbb{Q}$ y $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ se define por $f(q) = p \cdot q$, calcular la clase de equivalencia de 0 y de 1 con respecto a $\mathcal{R}$.

Problema 4 Considere el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A por:

$$(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \iff a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \text{ para un cierto } k \in \mathbb{Z}.$$

(i) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
(ii) Calcular explícitamente $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$.
(iii) Pruebe que $A = [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$.
(iv) Pruebe que existe una biyección $f : [(1,0)]_{\mathcal{R}} \to [(0,0)]_{\mathcal{R}}$.

4 Inducción

Problema 1
(i) Sean p, q reales no negativos tales que $p + q = 1$. Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$.
Indicación: Observe que $k^2 = k(k-1) + k$.
(ii) Pruebe que dado $n \geq 1$, para cualquier $j \geq 0$ se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+j-1}{j} = \binom{n+j}{j+1}.$$

(iii) Pruebe que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.

Problema 2 Calcular las siguientes sumatorias:

$$\text{(i)} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}, \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}, \qquad \text{(iii)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)}, \qquad \text{(iv)} \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1).$$

Problema 3 Probar por inducción que:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.
(iii) $\forall n \geq 2$, $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$, donde $(a+b) > 0$ y $a \neq b$.

Problema 4
(i) Sean E un conjunto no vacío y $\ll$ un orden total sobre E. Probar que si A es un subconjunto finito no vacío de E entonces, existe $a \in A$ tal que para cada $b \in A$, $a \ll b$.
Indicación: pruébelo por inducción sobre el número de elementos de A.
(ii) Probar por inducción que $\forall m \geq 1$, $5^{2m+1} + 7^{2m+1}$, es divisible por 6.
(iii) Probar por inducción que $\forall n \geq 2$, $n^n \geq 2n!$.

Problema 5
(i) Pruebe sin usar inducción que para $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, $\displaystyle\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$ y deduzca que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(ii) Sea $S = 1 + (1+b)q + (1+b+b^2)q^2 + \ldots + (1+b+\ldots+b^n)q^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, $q, b \in \mathbb{R}, q, b \neq 1$. Escribir S como una expresión de dos sumatorias y calcúlela.

Problema 6
(i) Muestre que el siguiente conjunto es infinito numerable: $A = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, m \leq n\}$.
(ii) Sean C y D conjuntos no vacíos, con C finito y D infinito numerable. Sea

$$\mathcal{F}(C,D) = \{f : C \to D \,:\, f \text{ es función } \}.$$

Muestre que $\mathcal{F}(C,D)$ es infinito numerable.
Indicación: Puede usar la siguiente propiedad: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos numerables, entonces $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es numerable.

5 Estructuras Algebráicas

Problema 1 Sea $(G, \otimes)$ un grupo y $(H, \otimes)$ un subgrupo de $(G, \otimes)$. Se define para $a \in G$ y $b \in G$:

$$a \otimes H = \{a \otimes h \,:\, h \in H\}.$$

Probar que:

(i) Si $g \in H \Longrightarrow g \otimes H = H$.
(ii) Si $a \otimes H \cap b \otimes H \neq \emptyset \Longrightarrow a \otimes H = b \otimes H$.

Problema 2
(i) Sea $(A, *)$ una estructura algebraica con elemento neutro $e \in A$ y asociativa. Se define el conjunto

$$B = \{x \in A \,:\, \exists y \in A, x * y = y * x = e\},$$

es decir, $x \in B$ si y sólo si x tiene inverso para la operación $*$ en A. Probar que $*$ es cerrada en B y que $(B, *)$ es un grupo.
(ii) Considere el conjunto $\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ con la operación $\cdot_{13}$ de multiplicación módulo 13. Sean

$$A_1 = \{1, 12\}, A_2 = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}, A_3 = \{1, 5, 8, 12\}.$$

Señale cual de los conjuntos anteriores con la operación $\cdot_{13}$ es un grupo y cual no lo es. Justifique claramente su respuesta.

Problema 3
(i) Sea $(G, *)$ un grupo que verifica la propiedad $\forall a, b \in G$, $(a * b)^2 = a^2 * b^2$. Probar que $(G, *)$ es un grupo abeliano.
(ii) Sean $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, f(x) = ax + b\}$ y $\overline{G} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \exists b \in \mathbb{R}, f(x) = x + b\}$. Sabiendo que $(G, \circ)$ es un grupo, probar que $(\overline{G}, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Problema 4
(i) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y H, K subgrupos de G. Se además $H * K \overset{\text{def}}{=} \{h * k \,:\, h \in H, k \in K\}$.

Probar que $H * K$ es un subgrupo de G.
(ii) Sea $(G, *)$ un grupo tal que para cada $g \in G$ existe $n \geq 1$ tal que $g^n = g * \ldots * g$ (n-veces) $= e$ (el neutro de G). Probar que el único homomorfismo $F : (G, *) \to (\mathbb{Z}, +)$ es la función constante $F(g) = 0$ en todo $g \in G$.
(iii) Sea $(G, *)$ un grupo que satisface la propiedad $a * a = e$ (el neutro del grupo) en cada $a \in G$, es decir, el inverso de cada elemento del grupo es el mismo elemento. Pruebe que G es un grupo abeliano. (Indicación: calcule $(a * b) * (b * a)$).

6 Complejos y Polinomios

Problema 1
(i) Calcule $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\cdot i}{1-i}\right)^{40}$.
(ii) Sabiendo que el polinomio $p(z) = z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8$ posée sólo raíces complejas y que una de ellas tiene módulo 2, encuentre todas las raíces del polinomio.

Problema 2 Sea $\alpha \neq 1$ una raíz séptima de la unidad. Pruebe que:
(i) $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$.
(ii) $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2} + \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \dfrac{\alpha^3}{1+\alpha^6} = -2$.

Problema 3
(i) Determine todos los números complejos tales que $|z-2| = 1$.
(ii) Resuelva la ecuación en $\mathbb{C}$, $z^5 = i$.
(iii) Dibuje la región $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq |z-1|\}$.

Problema 4
(i) Sea $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. $p \in K[x]$ un polinomio de grado 2 o 3. Demuestre que p es irreducible si y sólo si p no tiene raíces en K.
(ii) Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ y $a \in \mathbb{C}$ una raíz de p. Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, se define el polinomio $D(p)$ tal que $D(p)(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Se sabe que si $p, q \in \mathbb{C}[x]$ entonces $D(p \cdot q)(x) = D(p)(x)q(x) + p(x)D(q)(x)$. Probar que $D(p)(a) = 0$ si y sólo si $(x-a)^2$ divide a $p(x)$.

Problema 5
(i) Sea $p(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $r(X)$ el resto de la división de $p(X)$ por $(X-1)$. Si $r(4) = 0$ y $X = i$ es raíz de $p(X)$, calcule a, b, c.
(ii) Sea $p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$, con $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, tal que $p(X)$ tiene n raíces distintas en $\mathbb{C}$ y si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de $p(X)$ entonces su conjugado $\overline{z}$ también lo es. Demuestre que $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Indicación: Estudie el producto de polinomios $(X-z)(X-\overline{z})$ donde $z \in \mathbb{C}$.

Problema 6
(i) Calcule las raíces de $z^2 = -i$ y exprésela de la forma $a + bi$.
(ii) Si $z + z^{-1} = 2\cos(\alpha)$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que $z^n + z^{-n} = 2\cos(n\alpha)$.
(iii) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.