PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2002

MLM1300. Geometría I
Ejercicios de Trigonometría

(I) En el triángulo rectángulo

1. Dos lugares sobre el mismo meridiano están a 232,83 km. uno de otro. Encontrar su diferencia de latitud si el radio de la tierra es de 6350 km. aproximadamente.
2. Si en una circunferencia de radio 6 cm. un ángulo del centro de $20^\circ\ 17'$ subtiende un arco, hallar el ángulo que subtenderá tal longitud en una circunferencia de radio 8 cm.
3. Una escalera de 13,5 m. de longitud llega hasta la parte superior de un muro. Si la escalera forma un ángulo de 60° con el muro, hallar la altura de éste y la distancia a él desde el pie de la escalera.
4. Un asta de bandera está enclavada verticalmente en lo alto de un edificio; a 12 m. de distancia, los ángulos de elevación de la punta del asta y de la parte superior del edificio son de 60° y 30° respectivamente. Hallar la longitud del asta.
5. Desde la cúspide de un monumento de 30 m. de altura, los ángulos de depresión de dos objetos, que están sobre el terreno en la direcciónn oeste del monumento son de 45° y 30° respectivamente. Hallar la distancia que los separa.
6. Mirando hacia el sur desde la parte superior de un acantilado, los ángulos de depresión de una roca y de una boya se observa que son de 45° y 60°. Si se sabe que estos objetos están separados 110 m. hallar la altura del acantilado.
7. Desde lo alto de un acantilado de 1500 m. de altura los ángulos de depresión de dos embarcaciones que están situadas al sur del observador son de 25° y 85° respectivamente. Hallar la distancia entre esas embarcaciones.
8. Una torre está al pie de una colina cuya inclinación con respecto al plano horizontales de 9°. Desde un punto de la colina 12 m. más arriba la torre subtiende un ángulo de 54°, hallar la altura de la torre.
9. Una lámina rectangular $ABCD$ descansa en una muralla, estando el vértice A en la línea horizontal (piso) y el vértice B en la arista vertical. El lado AB forma un ángulo θ con la recta horizontal en el punto A. Sea E la proyección ortogonal de C sobre la arista vertical y F la respectiva proyección ortogonal de C sobre la horizontal. Calcular $EC = x$ y $CF = y$ en términos de θ. Usar estos resultados para probar que:

$$5x^2 - 4xy + y^2 = 1\ .$$

10. Se tiene un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Desde el extremo superior del plano inclinado se ve un objeto situado en la horizontal según ángulo de depresión α; desde la mitad del plano inclinado se observa el mismo objeto con un ángulo de depresión β. Demostrar que:

$$\cot\theta = 2\cot\alpha - \cot\beta\ .$$

11. Una torre de altura h se encuentra al norte de un punto A y al oeste de un punto B. En A y B los ángulos de elevación de la parte más alta de la torre son α y β, respectivamente. Si $AB = c$, demostrar que:

$$h = \frac{c}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta}}\ .$$

12. La altura de una colina es de 990 m. sobre el nivel de un plano horizontal. Desde un punto A de dicho plano la elevación angular de la cima de la colina es de $60°$. Un globo se eleva desde el punto A y asciende verticalmente con rapidez uniforme; después de 5 minutos , para un observador que está en el globo, la elevación angular de la cima de la colina es de $30°$. Hallar la rapidez de ascención del globo en [km./h.].

13. Un avión vuela en línea recta a una altura de 1000 m. A las 13 horas se encuentra en A y asciende bruscamente desviándose $30°$ con la horizontal manteniendo el movimiento rectilíneo con rapidez constante. Después de 10 segundos el avión se encuentra en B. Si desde una torre de observación en la tierra, se tienen ángulos de elevación de $30°$ y $45°$ para los puntos A y B, respectivamente, indicar cuál es la rapidez del avión suponiendo que las visuales de los puntos A y B y la trayectoria del avión están en un plano.

14. Dos astas de bandera se levantan verticalmente sobre un plano horizontal. A y B son dos puntos sobre la recta que une los pies de las astas y están entre ellos. Los ángulos de elevación de los extremos superiores de las astas vistos desde A son $30°$ y $60°$ y vistos desde B son de $60°$ y $45°$. Si la longitud de AB es de 9 m. hallar las longitudes de las astas y la distancia que las separa.

15. Dos chimeneas AB y CD tienen la misma altura. Una persona que está entre ellas en la recta AC que une sus bases observa que la elevación de la más cercana es de $60°$. Después de caminar 24 m. en una dirección perpendicular a AC observa que las elevaciones son de $45°$a la más cercana y $30°$a la otra. Hallar la altura de las chimeneas y la distancia que las separa.

16. Dos postes verticales cuyas alturas son a y b subtienden el mismo ángulo α desde un punto que está en la línea que une sus pies. Si ellos subtienden ángulos β γ desde un punto del plano horizontal desde el cual la líne que une sus pies subtiende un ángulo recto; demostrar que:

$$(a+b)^2\cot^2\alpha = a^2\cot^2\beta + b^2\cot^2\gamma\ .$$

17. La elevación de una colina desde un lugar P al este de ella es $45°$ y desde un lugar Q, al sur de P, la elevación es $30°$. Si la distancia entre P y Q es 500 m., hallar la altura de la colina.

18. Se tiene un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r. Demostrar que el perímetro y el área de este polígono son, respectivamente:

$$2nr\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n} \quad , \quad \frac{1}{2}nr^2\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}\ .$$

(II) Funciones trigonométricas

1. Expresar cada uno de los productos siguientes como suma:
   (a) $\operatorname{sen} 3\theta \cos 5\theta$
   (b) $\cos 7\theta \cos 5\theta$
   (c) $\cos 7\theta \operatorname{sen} 5\theta$
   (d) $\cos\theta \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2}$
   (e) $4 \cos \dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{6}$
   (f) $6 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}$
   (g) $\cos 2\theta \cos 6\theta$
   (h) $2 \operatorname{sen} 7\theta \operatorname{sen} 2\theta$

2. Expresar cada una de las sumas siguientes como producto:
   (a) $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{9} + \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{9}$
   (b) $\cos 2\theta - \cos\theta$
   (c) $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{5}$
   (d) $\cos \dfrac{7\pi}{9} + \cos \dfrac{2\pi}{9}$
   (e) $\operatorname{sen} 8\theta + \operatorname{sen} 4\theta$
   (f) $\operatorname{sen} \dfrac{5\theta}{3} - \operatorname{sen} \dfrac{5\theta}{6}$
   (g) $\cos 8\theta - \cos 4\theta$
   (h) $\operatorname{sen} 6\theta - \operatorname{sen} 4\theta$

3. Demostrar las siguientes identidades:

   (a)
$$\operatorname{sen}^4 \alpha + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \Big(1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha}\Big) = 1 - \cos^4 \alpha$$

   (b)
$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \Big(\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \cot \alpha}\Big)^2$$

   (c)
$$\frac{1 - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{(\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha)\cos\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^3 \alpha} = \operatorname{sen}\alpha$$

   (d)
$$\operatorname{cosec}\alpha(\sec\alpha - 1) - \cot\alpha(1 - \cos\alpha) = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha$$

   (e)
$$(\sec\alpha - 1)^2 - (\operatorname{tg}\alpha)^2 = (1 - \cos\alpha)^2$$

   (f)
$$\frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\cot^3 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$$

   (g)
$$a = \cot\alpha \Rightarrow a + \frac{1}{a} = \sec\alpha \operatorname{cosec}\alpha$$

   (h)
$$\operatorname{sen}^4 \alpha(3 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + \cos^4 \alpha(3 - 2\cos^2 \alpha) = 1$$

   (i)
$$\cot^2 \alpha \frac{\sec\alpha - 1}{1 + \operatorname{sen}\alpha} + \sec^2 \alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha - 1}{1 + \sec\alpha} = 0$$

(j)
$$\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$$

(k)
$$\operatorname{tg}\beta=\frac{n\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1-n\operatorname{sen}^2\alpha}\Rightarrow\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=(1-n)\operatorname{tg}\alpha$$

(l)
$$\frac{1+\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}}=\cot\frac{\alpha}{2}$$

(m)
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{sen}\alpha\Rightarrow\cos^2\frac{\alpha}{2}=\cos 36^\circ$$

4. Mediante las fórmulas de reducción, expresar en términos más simples:

$\cos(-1352^\circ)$	$\operatorname{tg}(-2440^\circ)$	$\operatorname{tg}840^\circ$	$\operatorname{sen}(-1150^\circ)$	$\operatorname{cosec}1575^\circ$
$\operatorname{sen}(-1200^\circ)$	$\cot(-855^\circ)$	$\cot 675^\circ$	$\cos(-240^\circ)$	$\sec(-138^\circ)$
$\cos 840^\circ$	$\operatorname{sen}(-960^\circ)$	$\cos(-780^\circ)$	$\operatorname{sen}(-510^\circ)$	$\sec(-1262^\circ)$
$\operatorname{tg}(-1215^\circ)$	$\operatorname{cosec}(-660^\circ)$	$\sec(-1575^\circ)$	$\cot(-996^\circ)$	$\operatorname{cosec}(-3672^\circ)$
$\operatorname{sen}(-1180^\circ)$	$\operatorname{tg}1020^\circ$	$\cos 980^\circ$	$\operatorname{cosec}(-210^\circ)$	$\sec(-545^\circ)$
$\cot(-480^\circ)$	$\operatorname{sen}980^\circ$	$\operatorname{tg}1061^\circ$	$\sec 4261^\circ$	$\operatorname{tg}(-21698^\circ)$

5. Demostrar las identidades:

(a) $\operatorname{tg}\alpha+\cot\alpha=\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$

(b) $1-2\operatorname{sen}^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

(c) $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{cosec}\alpha\sec\alpha=1$

(d) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha}=2\sec^2\alpha$

(e) $\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}=\sec\alpha$

(f) $\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$

(g) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\cot\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\cot\alpha}=2\operatorname{sen}^2\alpha-1$

(h) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$

(i) $\operatorname{sen}\alpha\sec\alpha\cot\alpha=1$

(j) $\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\alpha=\sec\alpha$

6. Comprobar que:

(a) $\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3}$

(b) $\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}$

(c) $\operatorname{sen}9^\circ+\cos 9^\circ=\sqrt{1+\operatorname{sen}18^\circ}$

(d) $\operatorname{sen}9^\circ-\cos 9^\circ=-\sqrt{1+\operatorname{sen}18^\circ}$

(e) $\operatorname{sen}9^\circ=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$

(f) $\cos 9^\circ=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$

7. Calcular:

(a)
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}$$

(b)
$$\cos\frac{\pi}{10}$$

(c)
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$$

(d)
$$\cos\frac{\pi}{12}$$

(e) Sabiendo que:

$$\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{60} \ ,$$

calcular:

$$\cos\frac{\pi}{60} \quad , \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{60} \ .$$

8. Calcular el valor de:

(a) $2\sqrt{3}\cos(-150^\circ) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cot 210^\circ + \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(-300^\circ) = \cdots$

(b) $\cos\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\alpha}{2} = \cdots$

(c) $\operatorname{cosec}\beta = -t^2 \Rightarrow \dfrac{\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\cdot\operatorname{sen}\left(2\pi+\left[\frac{3\pi}{2}-\beta\right]\right)}{\operatorname{tg}(\beta+\pi)\operatorname{cosec}(2\pi-\beta)} = \cdots$

(d) $\left(\sec\alpha = \frac{13}{5} \ \wedge \ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{2-3\cot\alpha}{4-9\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} = \cdots$

(e) 4α es agudo $\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}} = \cdots$

9. Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{sen}\beta = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ y $\pi \le \beta \le \frac{3\pi}{2}$, calcular:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) \quad , \quad \cos(\alpha \pm \beta) \quad , \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) \ .$$

10. Si $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{24}{25}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$, $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} \le \beta \le \pi$, calcular:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) \quad , \quad \cos(\alpha \pm \beta) \quad , \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) \ .$$

11. Demostrar las identidades:

(a) $\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen}\alpha$

(b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha$

(c) $\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

(d) $\operatorname{sen}^4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$

(e) $1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}$

(f) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

(g) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

(h) $\operatorname{cosec}2\alpha + \cot 2\alpha = \cot\alpha$

(i) $\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$

(j) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha}{\cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sec 2\alpha$

(k) $\dfrac{\operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2$

(l) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} = \cot\alpha$

(m) $\dfrac{\cot^2\alpha - 1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} = \cos 2\alpha$

(n) $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}3\alpha + \operatorname{sen}5\alpha + \operatorname{sen}7\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\operatorname{sen}4\alpha$

12. Desde cada extremo de una base de longitud $2a$ la elevación angular de un monte es θ y desde el punto medio de tal base es ϕ. Demostrar que el monte mide:

$$a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\sqrt{\operatorname{cosec}(\phi+\theta)\operatorname{cosec}(\phi-\theta)}\cdot$$

13. Una torre dista 40 metros desde la orilla más cercana de un río cuyo ancho es de 100 metros,Calcular la altura de la torre si desde la cúspide se observa el río bajo un ángulo de 30°.

14. Demostrar que:

$$\operatorname{sen}^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ - \operatorname{sen} 10^\circ \cos 20^\circ = \frac{3}{4}\cdot$$

15. Demostrar que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4\cdot$$

16. Demostrar:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{n \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 - n \operatorname{sen}^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) = (1 - n) \operatorname{tg} \alpha\cdot$$

17. Demostrar que:

$$\cos^3 \alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{3} + \operatorname{sen}^3 \alpha \cdot \frac{\cos 3\alpha}{3} = \frac{\operatorname{sen} 4\alpha}{4}\cdot$$

18. Demostrar que:

(a) $\cos 10^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ = \sqrt{3} \operatorname{sen} 70^\circ$

(b) $4 \cos 18^\circ - 3 \sec 18^\circ = 2 \operatorname{tg} 18^\circ$

(c) $\cot 15^\circ + \cot 75^\circ + \cot 135^\circ - \operatorname{cosec} 30^\circ = 1$

(d) $\cos 6^\circ \cos 66^\circ \cos 42^\circ \cos 78^\circ = \frac{1}{16}$

(e) $\operatorname{sen} 18^\circ + \cos 18^\circ = \sqrt{2} \cos 27^\circ$

(f) $\operatorname{sen} 33^\circ + \cos 63^\circ = \cos 3^\circ$

(g) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$

19. Demostrar:

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \beta}{2}}\cdot$$

20. Demostrar que:

(a)

$$\cot(\alpha + 15^\circ) - \operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ) = \frac{4 \cos 2\alpha}{2 \operatorname{sen} 2\alpha + 1}\cdot$$

(b)

$$\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha\cdot$$

(c)

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen} 4\beta}{\cos(\alpha + \beta) + \cos 4\beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - 3\beta}{2}\cdot$$

(d)

$$\frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha\cdot$$

21. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\cdot$$

22. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cdot$$

23. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \cos^2 2\alpha+\cos^2 2\beta+\cos^2 2\gamma=1+\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma\cdot$$

24. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\beta+\gamma}{4}\cos\frac{\gamma+\alpha}{4}\cdot$$

25. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi+\beta}{4}\cos\frac{\pi+\gamma}{4}\cdot$$

26. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}=1+4\operatorname{sen}\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi-\beta}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi-\gamma}{4}\cdot$$

27. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot$$

28. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\cdot$$

29. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha=1\cdot$$

30. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$
$$\Downarrow$$
$$(\cot\alpha+\cot\beta)(\cot\beta+\cot\gamma)(\cot\gamma+\cot\beta)=\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\operatorname{cosec}\gamma\ .$$

31. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}+\frac{\cot\gamma+\cot\alpha}{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\cot\beta+\cot\gamma}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}=1\cdot$$

32. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma)^2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\cdot$$

33. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1\cdot$$

34. Demostrar que:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}2\beta+\operatorname{sen}2\gamma}{\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}2\beta-\operatorname{sen}2\gamma}=\cot\alpha\ \cot\beta\cdot$$

(III) Funciones trigonométricas inversas

(I) Demostrar las identidades siguientes:

(1)
$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arccos}\frac{5}{13}=\operatorname{Arctg}\frac{5}{12}$$

(2)
$$\operatorname{Arccosec}\frac{17}{8}=\operatorname{Arctg}\frac{8}{15}$$

(3)
$$2\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}$$

(4)
$$\operatorname{Arctg}\frac{2}{11}+\operatorname{Arccot}\frac{24}{7}=\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}$$

(5)
$$2\operatorname{Arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{Arctg}\frac{32}{43}$$

(6)
$$\operatorname{Arccot}\frac{4}{3}-\operatorname{Arccot}\frac{15}{8}=\operatorname{Arccot}\frac{84}{13}$$

(7)
$$\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{Arctg}\frac{5}{6}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{11}$$

(8)
$$2\operatorname{Arctg}\frac{5}{4}=\operatorname{Arctg}\frac{40}{9}$$

(9)
$$\sec(\operatorname{Arctg}x)=\sqrt{1+x^2}$$

(10)
$$\operatorname{Arctg}\frac{4}{3}-\operatorname{Arctg}1=\operatorname{Arctg}\frac{1}{7}$$

(11)
$$\operatorname{Arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{18}+\operatorname{Arctg}3=\frac{\pi}{2}$$

(12)
$$\operatorname{Arctg}\frac{3}{5}+\operatorname{Arcsen}\frac{3}{5}=\operatorname{Arctg}\frac{27}{11}$$

(13)
$$\operatorname{sen}(2\operatorname{Arcsen}x)=2x\sqrt{1-x^2}$$

(14)
$$-1\leq\frac{a-x}{a+x}\leq 1\Rightarrow 2\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}=\operatorname{Arccos}\frac{a-x}{a+x}$$

(15)

$$2\operatorname{Arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{7}+2\operatorname{Arctg}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$$

(16)

$$\operatorname{Arccos}\frac{63}{65}+2\operatorname{Arctg}\frac{1}{5}=\operatorname{Arcsen}\frac{3}{5}$$

(17)

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{Arctg}x)=2\operatorname{tg}(\operatorname{Arctg}x+\operatorname{Arctg}x^3)$$

(18)

$$\operatorname{Arccos}\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}=2\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

(19)

$$\operatorname{Arcsen}x-\operatorname{Arccos}y=\operatorname{Arccos}(y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}+\alpha\pi$$

(20)

$$\operatorname{Arctg}x+\operatorname{Arctg}y+\operatorname{Arctg}z=\pi\Rightarrow x+y+z=xyz$$

(21)

$$4\operatorname{Arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{Arctg}\frac{1}{12}=\frac{\pi}{4}$$

(22)

$$\operatorname{Arctg}\frac{4}{3}+\operatorname{Arccos}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\pi+\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}$$

(23)

$$\operatorname{Arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arctg}(-1)=\frac{\pi}{12}$$

(24)

$$\left(\cos\alpha\geq 0\ \wedge\ \mu=\operatorname{Arccot}\sqrt{\cos\alpha}-\operatorname{Arctg}\sqrt{\cos\alpha}\right)\Rightarrow\operatorname{sen}\mu=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

(II) Demostrar que:

$$\cos\left(\operatorname{Arctg}\left[\operatorname{sen}\left(\operatorname{Arctg}x\right)\right]\right)=\left(\frac{x^2+1}{1+2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(III) Resolver las ecuaciones:

(1)
$$\operatorname{Arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}x$$

(2)
$$\operatorname{Arctg}x+\operatorname{Arctg}(x-1)=\operatorname{Arctg}(-3)$$

(3)
$$2\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{Arccos}\frac{3}{5}=\operatorname{Arcsen}\frac{1}{x}$$

(4)
$$\operatorname{Arctg}x=2\operatorname{Arccos}\frac{1}{2}x$$

(5)
$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\operatorname{Arctg}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)=$$
$$=\operatorname{Arctg}\frac{23}{36}$$

(6)
$$\operatorname{Arctg}x=\operatorname{Arccot}x$$

(7)
$$\operatorname{Arctg}(x+1)-\operatorname{Arctg}(x-1)=\operatorname{Arctg}2$$

(8)
$$\operatorname{Arcsen}x-\operatorname{Arccos}x=\operatorname{Arcsen}(3x-2)$$

(9)
$$\operatorname{Arccos}x-\operatorname{Arcsen}x=\operatorname{Arccos}x\sqrt{3}$$

(10)
$$\operatorname{Arctg}\frac{x-1}{x-2}+\operatorname{Arctg}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$$

(11)
$$2\operatorname{Arccot}2+\operatorname{Arccos}\frac{3}{5}=\operatorname{Arccosec}x$$

(12)
$$\operatorname{Arctg}x+\operatorname{Arctg}(1-x)=2\operatorname{Arctg}\sqrt{x-x^2}$$

(IV) Resolver las ecuaciones:

(1)
$$\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2)
$$\operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}$$

(3)
$$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{3}$$

(4)
$$\cot\theta=-\sqrt{3}$$

(5)
$$\sec^2\theta=\sec^2\alpha$$

(6)
$$\cos 3\theta=\cos 2\theta$$

(7)
$$\operatorname{sen}5\theta+\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}3\theta$$

(8)
$$1+\cos\theta=2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

(9)
$$\cot\theta-\operatorname{tg}\theta=2$$

(10)
$$\operatorname{sen}11\theta\operatorname{sen}4\theta+\operatorname{sen}5\theta\operatorname{sen}2\theta=0$$

(11)
$$\operatorname{sen}m\theta+\cos n\theta=0$$

(12)
$$\operatorname{sen}\theta-\sqrt{3}\cos\theta=1$$

(13)
$$\cos\theta=\sqrt{3}(1-\operatorname{sen}\theta)$$

(14)
$$\cos\theta+\operatorname{sen}\theta+\sqrt{2}=0$$

(15)
$$2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}3\theta=1$$

(16)
$$\operatorname{sen}3\theta=8\operatorname{sen}^3\theta$$

(17)
$$\cos\theta - \operatorname{sen}\theta = \cos 2\theta$$

(18)
$$\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}3\theta = 2\operatorname{tg}\theta$$

(19)
$$\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$$

(20)
$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$$

(21)
$$\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$$

(22)
$$\cot\theta - \operatorname{tg}\theta = 2$$

(23)
$$2\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 4\cos^2\theta = 1$$

(24)
$$4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$$

(25)
$$2\cos^3\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

(26)
$$\sec^3\theta - 2\operatorname{tg}^2\theta = 2$$

(27)
$$\operatorname{sen}5\theta - \operatorname{sen}3\theta = \operatorname{sen}\theta\sec\frac{\pi}{4}$$

(28)
$$\cot\theta + \cot\left(\pi' over 4 + \theta\right)$$

(29)
$$\operatorname{sen}5\theta - \operatorname{sen}3\theta = \sqrt{2}\cos 4\theta$$

(30)
$$\operatorname{sen}7\theta = \operatorname{sen}4\theta - \operatorname{sen}\theta$$

(V) Resolver la ecuación:

$$\left(\operatorname{tg}\alpha\right)^{\operatorname{Arcsen} x} = \left(\cot\alpha\right)^{-\frac{\pi}{2}}\left(\cot\alpha\right)^{\operatorname{Arcsen} x\sqrt{2}}$$

(VI) Resolver los sistemas:

(1)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \operatorname{tg}x & + & \operatorname{tg}y & = & 2 \\ 2\cos x & \cdot & \cos y & = & 1 \end{array}\right\}$$

(2)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \operatorname{sen}x & + & \operatorname{sen}y & = & a \\ \cos 2y & - & \cos 2x & = & b \end{array}\right\}$$

(3)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \operatorname{sen}x & + & \operatorname{sen}y & = & \operatorname{sen}\alpha \\ \cos x & + & \cos y & = & \cos\alpha \end{array}\right\}$$

(4)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \operatorname{sen}x & + & \operatorname{sen}y & = & m\operatorname{sen}\alpha \\ \cos x & + & \cos y & = & m\cos\alpha \end{array}\right\}$$

(IV) Trigonometría de un triángulo cualquiera

1. Determinar el área del paralelogramo si sus lados adyacentes son 42 *cm.* y 32 *cm.* y forman un ángulo de 30°.

2. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:
$$\sqrt{bc(s-b)(s-c)}\cos\frac{\alpha}{2} = (ABC)\ .$$

3. Si en un triángulo ABC $a = 25$, $b = 39$ y $c = 40$, encontrar las longitudes t_a, t_b y t_c.

4. Si en un triángulo ABC $a = 25$, $b = 39$ y $c = 40$, encontrar las longitudes h_a, h_b y h_c.

5. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$b^2 \operatorname{sen} 2\gamma + c^2 \operatorname{sen} 2\beta = 4(ABC)\ .$$

6. Si en un triángulo ABC $a = 25$, $b = 39$ y $c = 40$, encontrar las longitudes b_α, b_β y b_γ.

7. Si en un triángulo ABC $a = 13$, $b = 14$ y $c = 15$, encontrar las longitudes r, ρ.

8. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$(\rho_a - \rho)(\rho_b + \rho_c) = a^2\ .$$

9. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\frac{b-c}{\rho_a} + \frac{c-a}{\rho_b} + \frac{a-b}{\rho_c} = 0\ .$$

10. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$4(ABC)(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) = a^2 + b^2 + c^2\ .$$

11. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que $\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$.

12. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que $\rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c = (ABC)^2$.

13. Determinar el área del triángulo de lados $a = 171\ cm.$, $b = 195\ cm.$ y $c = 204\ cm.$

14. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$r \cdot \rho \cdot (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma) = (ABC)\ .$$

15. En un paralelogramo los lados miden 2 cm. y 3 cm. respectivamente y el ángulo comprendido entre ellos es de $60°$. Demostrar que el ángulo formado por las diagonales es apróximadamente $64°18'23{,}8"$.

16. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{\rho}\ .$$

17. Dos lados de un triángulo son $a = 120\ m.$ y $b = 300\ m.$ y el ángulo $\gamma = 150°$, determinar el área del triángulo.

18. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} = \frac{2}{h_c}\ .$$

19. Si en el triángulo ABC se tiene $\rho_a = 8$, $\rho_b = 12$ y $\rho_c = 24$, encontrar las longitudes h_a, h_b y h_c.

20. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_a}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_b}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_c}\right) = \frac{4r}{\rho^2 s^2}\ .$$

21. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$4r\cos\frac{\gamma}{2}=(a+b)\sec\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,$$

22. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que $\rho+\rho_a+\rho_b-\rho_c=4r\cos\gamma$.

23. Dado un triángulo ABC cualquiera, demostrar que su área está dada por:

$$(ABC)=\frac{a^2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}{2\operatorname{sen}\alpha}\ .$$

24. Resolver el triángulo ABC sabiendo que $a=524,7 \quad , \quad \beta=46°24' \quad , \quad \gamma=98°41'$.

25. Resolver el triángulo ABC sabiendo que $b=2,5 \quad , \quad c=2 \quad , \quad \alpha=22°20'$.

26. Resolver el triángulo ABC sabiendo que $a=8 \quad , \quad b=7 \quad , \quad c=9$.

27. Resolver los triángulos ABC sabiendo que $a=62,48 \quad , \quad b=89,72 \quad , \quad \alpha=32°16'$.

28. Determinar los valores de α tales que $0<\alpha<\pi$ que satisfacen $2\cos^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha<2$.

29. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\frac{a+b}{a-b}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ .$$

30. Si los lados de un triángulo ABC están en progresión aritmética y si a es el menor, entonces $\cos\alpha=\dfrac{4c-3b}{2c}$.

31. Demostrar que en un triángulo ABC se tiene que $b\cos\beta+c\cos\gamma=a\cos(\beta-\gamma)$.

32. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{a+b}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\ .$$

33. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\gamma\cos\alpha+c\cos\alpha\cos\beta=\frac{2(ABC)\operatorname{sen}\alpha}{a}\ .$$

34. Demostrar que en si un triángulo ABC se tiene que:

$$c(a+b)\cos\frac{\beta}{2}=b(c+a)\cos\frac{\gamma}{2}\ ,$$

entonces el triángulo es isósceles.

35. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}\ .$$

36. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\frac{c+b}{c-b}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ .$$

37. Si el área de un triángulo ABC es 96 y los exradios son $\rho_a = 8$, $\rho_b = 12$ y $\rho_c = 24$, determinar a,b y c.

38. Dado un triángulo ABC, demostrar que los ángulos del respectivo triángulo órtico son $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 2\beta$ y $180^\circ - 2\gamma$.

39. Dado un triángulo ABC, demostrar que el área del respectivo triángulo órtico es:

$$\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma \ .$$

40. Dado un triángulo ABC, demostrar que el inradio del respectivo triángulo órtico es $2r \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

41. Dado un triángulo ABC, demostrar que los lados del respectivo triángulo órtico son $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$ y $c\cos\gamma$.

42. Dado un triángulo ABC, demostrar que el perímetro del respectivo triángulo órtico es $4r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma$.

43. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\rho} \ .$$

44. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\rho_c} \ .$$

45. En un triángulo ABC resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}\alpha & = & \frac{3}{4}\operatorname{sen}\beta \\ \\ \operatorname{tg}\alpha & = & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta \end{array}\right\} \ .$$

46. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que $a^2 - b^2 = 2rc \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$.

47. Sean α ángulo fijo y β ángulo variable de un triángulo ABC, se define la función real f mediante:

$$f(\beta) = \frac{\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)} \ , \text{ con } 0 \le \beta \le \pi - \alpha \ ,$$

demostrar que $f(\beta)$ es una función constante.

48. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 4r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \ .$$

49. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que $a\cot\alpha + b\cot\beta + c\cot\gamma = 2(r+\rho)$.

50. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$a^2b^2c^2(\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma) = 32(ABC)^3 \ .$$

51. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}=2+\frac{\rho}{2r}\ .$$

52. Demostrar que en un triángulo ABC se cumple que:

$$(b+c)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+(c+a)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+(a+b)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=4r(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\ .$$

53. Dado el cuadrilátero convexo $ABCD$ cuyas diagonales son $AC=e$ y $BD=f$ y el ángulo entre las diagonales mencionadas es δ, entonces el área del cuadrilátero es:

$$(ABCD)=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f\cdot \operatorname{sen}\delta\ .$$

54. Dado el cuadrilátero inscriptible $ABCD$ de lados $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ y cuyas diagonales son $AC=e$ y $BD=f$ y el ángulo entre las diagonales mencionadas es δ, entonces:

$$2\cdot e\cdot f\cdot\cos\delta=(a^2+c^2)-(b^2+d^2)\ .$$

55. Dado el cuadrilátero circunscriptible $ABCD$ de lados $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, entonces el área del cuadrilátero es:

$$(ABCD)=\sqrt{abcd}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha+\gamma}{2}\ .$$

56. Dado el cuadrilátero inscriptible y circunscriptible $ABCD$ cuyos lados son $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, entonces el área del cuadrilátero es:

$$(ABCD)=\sqrt{abcd}\ .$$

57. Un avión vuela con rapidez de 246,3 [km/h] en aire con calma. Si el viento sopla con rapidez de 43,5 [km/h] en dirección S 21° O y el avión tiene rumbo S 53° E, se pide determinar la magnitud de la rapidez del avión y su dirección.

58. Una persona camina por una carretera de sur a norte. Al comenzar su caminata ve a su derecha dos edificios, los que forman un ángulo de 60° con la persona en el vértice. El edificio que está más cerca hacia el norte la persona lo ve con un ángulo de 15° con respecto a la carretera; cuando ha caminado 50 km. vuelve su mirada hacia el sur este y ve que los edificios están alineados formando un ángulo de 60° con la carretera. Determinar la distancia entre los edificios.