PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2002.

# MAT 1208 * I-1

1. *a*) Dibuje la gráfica de la función :

$$f(x) = cos\,(2\,x) + cos\,(3\,x)$$

en un período completo y aproxime las raíces de la ecuación $f(x) = 0$

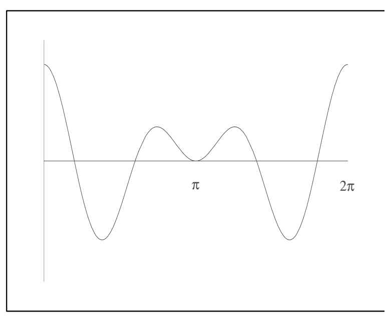
*b*) resuelva algebraicamente la ecuación

$$cos\,(2\,x) + cos\,(3\,x) = 0$$

en un período completo.

**Solución**

a) La gráfica es, para $0 \leq x \leq 2\,\pi$ , $-2 \leq y \leq 2$:




$\longrightarrow$ 1, 5 puntos.

Las raíces se encuentran con $\boxed{\text{Trace}}$ o $\boxed{\text{GLSV-root}}$ y son:

$$x_1 = 0{,}628 \quad x_2 = 1{,}885 \quad x_3 = 3{,}1416$$
$$x_4 = 4{,}398 \quad x_5 = 5{,}655$$

$\longrightarrow$ 0, 3 puntos cada una.

b) Por las fórmulas de suma a producto:

$cos\,(2\,x) + cos\,(3\,x) = 2\,cos\,(\frac{5}{2}\,x)\,cos\,(\frac{x}{2}) = 0$ $\longrightarrow$ 1 punto.

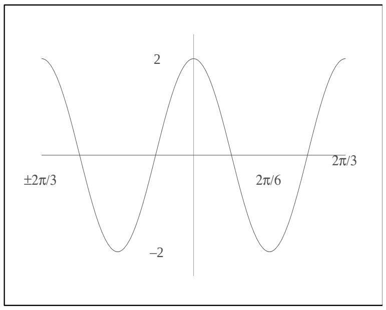
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} cos\,(\frac{5}{2}\,x) & = & 0 \\ \\ cos\,(\frac{x}{2}) & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{5}{2}\,x & = & \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3\,\pi}{2}\,,\ \frac{5\,\pi}{2}\,,\ \frac{7\,\pi}{2}\,,\ \frac{9\,\pi}{2} \\ \\ \frac{x}{2} & = & \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$\longrightarrow$ 1 punto.

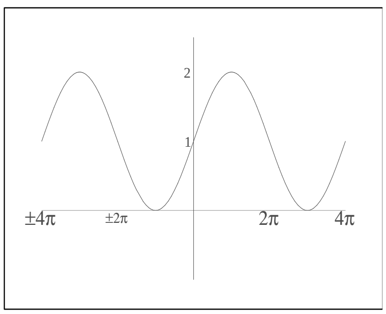
Soluciones $= \{\frac{\pi}{5}\,,\ \frac{3\,\pi}{5}\,,\pi\,,\ \frac{7\,\pi}{5}\,,\ \frac{9\,\pi}{5}\}$ entre 0 y $2\,\pi$ $\longrightarrow$ 1 punto.

2. Encuentre una fórmula para las gráficas siguientes, indicando período y amplitud.

a)




b)




**Solución**

*a*) $y = 2\,cos\,(3\,x)$

$\longrightarrow$ 2 puntos.

Amplitud $= 2$ , período $= \frac{2\pi}{3}$

$\longrightarrow$ 1 punto.

*b*) $y = 1 + sen\,(\frac{x}{2})$

$\longrightarrow$ 2 puntos.

Amplitud $= 1$ , período $= 4\,\pi$

$\longrightarrow$ 1 punto.

3. *a*) Demostrar que:

$$cos\ \underbrace{(\ Arctg\ (\ cos\ \underbrace{(Arcsen\, x)}_{\alpha}\ )\ )}_{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

Indicación: Considere primero $\alpha = Arcsen\, x$

**Solución**

$$\alpha = Arcsen\, x \Longrightarrow\ sen\alpha = x\ \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow\ cos\,\alpha > 0 \Longrightarrow\ cos\,\alpha = \sqrt{1-x^2}$$

$\longrightarrow$ 1 punto.

$$\beta = Arctg\left(\sqrt{1-x^2}\right) \Longrightarrow\ tg\,\beta = \sqrt{1-x^2}\ \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$\longrightarrow$ 1 punto.

$$cos^2\,\beta = \frac{1}{sec^2\,\beta} = \frac{1}{tg^2\,\beta + 1} = \frac{1}{1-x^2+1} = \frac{1}{2-x^2}$$

$$\Longrightarrow\ cos\,\beta > 0 \Longrightarrow\ cos\,\beta = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\longrightarrow$ 1 punto.

*b*) Demostrar que si $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, entonces:

$$tg\,\alpha\, tg\,\beta + tg\,\beta\, tg\,\gamma + tg\,\gamma\, tg\,\alpha = 1$$

Indicación : Considere $tg\,\gamma$ como $tg\,(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta))$

**Solución**

$$\begin{aligned} tg\,\alpha\, tg\,\beta + tg\,\beta\, tg\,\gamma + tg\,\gamma\, tg\,\alpha &= tg\,\alpha\, tg\,\beta + tg\,\beta\, tg\,(\tfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)) + tg\,(\tfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta))\, tg\,\alpha \\ &= tg\,\alpha\, tg\,\beta + tg\,\beta\, cotg\,(\alpha+\beta) + cotg\,(\alpha+\beta)\, tg\,\alpha \\ &= tg\,\alpha\, tg\,\beta + cotg\,(\alpha+\beta)\,[\,tg\,\alpha\, tg\,\beta\,] \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ 0,5 punto.

$$= tg\,\alpha\, tg\,\beta + cotg\,(\alpha+\beta)\,[\,tg\,(\alpha+\beta)\ (1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta\,)]$$

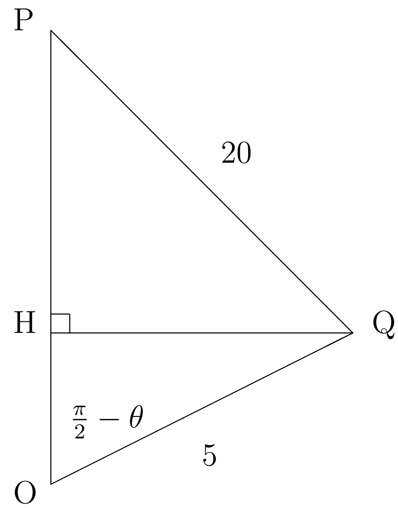
$\longrightarrow$ 2 puntos.

$$\begin{aligned} &= tg\,\alpha\, tg\,\beta + cotg\,(\alpha+\beta)\, tg\,(\alpha+\beta)\ (1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta\,) \\ &= tg\,\alpha\, tg\,\beta + 1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta = 1 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ 0,5 punto.

4. Los pistones en el motor de un automóvil se mueven hacia y hacia abajo de manera repetida para hacer girar el cigűeñal como se muestra en la figura. Determine la altura del punto $P$ por encima del centro $O$ del cigűeñal en función del ángulo $\theta$.

**<u>Solución</u>**




$\longrightarrow$ 1,5 puntos.

$\bar{OH} = 5\,cos(\dfrac{\pi}{2} - \theta) = 5\,sen\,\theta$

$\bar{HQ} = 5\,sen(\dfrac{\pi}{2} - \theta) = 5\,cos\,\theta$

$\longrightarrow$ 1,5 puntos.

$\bar{HP}^2 = 400 - 25\,cos^2\theta$

Luego $\bar{HP} = 20\sqrt{1 - \dfrac{1}{16}\,cos^2\theta}$

$\longrightarrow$ 1,5 puntos.

Luego $\bar{OP} = \bar{HP} + \bar{OH} = 20\sqrt{1 - \dfrac{1}{16}\,cos^2\theta} + 5\,sen\,\theta.$

$\longrightarrow$ 1,5 puntos.