Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 $\star$ Geometría

Solución — Control N°3
Versión A

1. Sea $ABCD$ un tetraedro, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -1$. Sean P, Q, R y S los puntos que dividen respectivamente a AD, BC, AC y BD en razón λ.

   Demuestre que los segmentos PQ y RS concurren en un punto que los dimidia.

   Solución:

   Tomemos el origen en D (o en cualquier otro punto en forma adecuada). Entonces, los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ forman una base, y los vectores posición de los puntos P, Q, R y S están dados —en términos de la base— por:

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \frac{\vec{a}}{\lambda+1} + \frac{\lambda\vec{d}}{\lambda+1} &= \frac{\vec{a}}{\lambda+1},\\
\vec{q} &= \frac{\vec{b}}{\lambda+1} + \frac{\lambda\vec{c}}{\lambda+1},\\
\vec{r} &= \frac{\vec{a}}{\lambda+1} + \frac{\lambda\vec{c}}{\lambda+1},\\
\vec{s} &= \frac{\vec{b}}{\lambda+1} + \frac{\lambda\vec{d}}{\lambda+1} &= \frac{\vec{b}}{\lambda+1}.
\end{aligned}$$

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)

   Las ecuaciones de las rectas PQ y RS son:

$$\begin{aligned}
X \in PQ &\iff \vec{x} = t\vec{p} + (1-t)\vec{q} \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R},\\
Y \in RS &\iff \vec{y} = u\vec{r} + (1-u)\vec{s} \quad \text{para algún } u \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Reemplazando $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ y $\vec{s}$ en términos de la base $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
X \in PQ \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{x} = \frac{t\vec{a}}{\lambda+1} + \frac{(1-t)\vec{b}}{\lambda+1} + \frac{\lambda(1-t)\vec{c}}{\lambda+1} \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R}, \\
Y \in RS \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{y} = \frac{u\vec{a}}{\lambda+1} + \frac{(1-u)\vec{b}}{\lambda+1} + \frac{\lambda u\vec{c}}{\lambda+1} \quad \text{para algún } u \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 2 pts.)}}$

Las rectas PQ y RS serán concurrentes si y sólo si existen $t, u \in \mathbb{R}$ tales que los puntos X e Y de las fórmulas anteriores coincidan, o sea, si y sólo si los coeficientes correspondientes de las combinaciones lineales anteriores son iguales.

En otras palabras, las rectas PQ y RS serán concurrentes si y sólo si el sistema de ecuaciones

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{t}{\lambda+1} &= \frac{u}{\lambda+1} \\
\frac{1-t}{\lambda+1} &= \frac{1-u}{\lambda+1} \\
\frac{\lambda(1-t)}{\lambda+1} &= \frac{\lambda u}{\lambda+1}
\end{aligned}\right|
$$

tiene solución.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$

Pero en este sistema la primera y la segunda ecuación son equivalentes, y todas las ecuaciones del sistema pueden ser amplificadas por $(\lambda+1)$, por lo que el sistema queda

$$
\left.\begin{aligned}
t &= u \\
1-t &= u
\end{aligned}\right|
$$

que tiene solución $t = u = 1/2$.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 4 pts.)}}$

Así, las dos rectas son concurrentes en el punto

$$\vec{x} = \vec{y} = \frac{\vec{a}}{2(\lambda+1)} + \frac{\vec{b}}{2(\lambda+1)} + \frac{\vec{c}}{2(\lambda+1)}.$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 5 pts.)}}$

Como $t = u = 1/2$, tenemos que $X = Y$ es el punto medio tanto de PQ como de RS.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$

2. Encuentre la ecuación del plano que contiene a la intersección de los planos

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5, \\ x - 2y + 3z &= -2 \end{aligned}$$

y que pasa por el punto $(1, -2, 3)$.

Solución:

Un plano que contenga a la intersección de los dos planos debe tener una ecuación de la forma la forma

$$2x + 3y - z - 5 + \lambda(x - 2y + 3z + 2) = 0,$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)}}$

que puede ser reescrita como

$$(2+\lambda)x + (3-2\lambda)y + (3\lambda-1)z + (2\lambda-5) = 0.$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 2 pts.)}}$

Así, si dicho plano pasa por el punto $(1,-2,3))$, debe tenerse que

$$(2+\lambda)\cdot 1 + (3-2\lambda)\cdot(-2) + (3\lambda-1)\cdot 3 + (2\lambda-5) = 0,$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$

de donde

$$2-6-3-5+(1+4+9+2)\lambda = 0,$$

o sea,

$$16\lambda = 12,$$

por lo que $\lambda = 3/4$.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 4 pts.)}}$

Así, finalmente, el plano buscado tiene por ecuación

$$\left(2+\frac{3}{4}\right)x + \left(3-2\cdot\frac{3}{4}\right)y + \left(3\cdot\frac{3}{4}-1\right)z + \left(2\cdot\frac{3}{4}-5\right) = 0,$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 5 pts.)}}$

o equivalentemente

$$\frac{11x}{4} + \frac{6x}{4} + \frac{5z}{4} - \frac{14}{4} = 0,$$

que es lo mismo que

$$11x + 6x + 5z - 14 = 0.$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución — Control N°3
Versión B

1. Sea $ABCD$ un tetraedro, y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda, \mu \neq -1$. Sean P y Q los puntos que dividen a AD y BD en razón λ, y sean R y S los puntos que dividen a AC y BC en razón μ.

   Demuestre que las rectas PS y QR concurren en un punto. ¿En qué razón divide este punto a PS y a QR?

   Solución:

   Tomemos el origen en D (o en cualquier otro punto en forma adecuada). Entonces, los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ forman una base, y los vectores posición de los puntos P, Q, R y S están dados —en términos de la base— por:

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \frac{\vec{a}}{\lambda+1} + \frac{\lambda\vec{d}}{\lambda+1} = \frac{\vec{a}}{\lambda+1}, \\
\vec{q} &= \frac{\vec{b}}{\lambda+1} + \frac{\lambda\vec{d}}{\lambda+1} = \frac{\vec{b}}{\lambda+1}, \\
\vec{r} &= \frac{\vec{a}}{\mu+1} + \frac{\mu\vec{c}}{\mu+1}, \\
\vec{s} &= \frac{\vec{b}}{\mu+1} + \frac{\mu\vec{c}}{\mu+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)}}$$

   Las ecuaciones de las rectas PS y QR son:

$$\begin{aligned}
X \in PS &\iff \vec{x} = t\vec{p} + (1-t)\vec{s} \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R}, \\
Y \in QR &\iff \vec{y} = u\vec{q} + (1-u)\vec{r} \quad \text{para algún } u \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Reemplazando $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ y $\vec{s}$ en términos de la base $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$, tenemos:

$$X \in PS \iff \vec{x} = \frac{t\vec{a}}{\lambda+1} + \frac{(1-t)\vec{b}}{\mu+1} + \frac{\mu(1-t)\vec{c}}{\mu+1} \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R},$$

$$Y \in QR \iff \vec{y} = \frac{(1-u)\vec{a}}{\mu+1} + \frac{u\vec{b}}{\lambda+1} + \frac{\mu(1-u)\vec{c}}{\mu+1} \quad \text{para algún } u \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 2 pts.)}}$$

Las rectas PS y QR serán concurrentes si y sólo si existen $t, u \in \mathbb{R}$ tales que los puntos X e Y de las fórmulas anteriores coincidan, o sea, si y sólo si los coeficientes correspondientes de las combinaciones lineales anteriores son iguales.

En otras palabras, las rectas PQ y RS serán concurrentes si y sólo si el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{t}{\lambda+1} & = & \dfrac{1-u}{\mu+1} \\[2ex] \dfrac{1-t}{\mu+1} & = & \dfrac{u}{\lambda+1} \\[2ex] \dfrac{\mu(1-t)}{\mu+1} & = & \dfrac{\mu(1-u)}{\mu+1} \end{array}\right|$$

tiene solución.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$$

Pero claramente la última ecuación implica que $u = t$, y tras reemplazar u por t en las primeras dos ecuaciones queda sólo la ecuación

$$\frac{t}{\lambda+1} = \frac{1-t}{\mu+1},$$

repetida dos veces, por lo que el sistema tiene la solución $u = t = (\lambda+1)/(\lambda+\mu+2)$.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 4 pts.)}}$$

Así, las dos rectas son concurrentes en el punto

$$\vec{x} = \vec{y} = \frac{\vec{a}}{\lambda+\mu+2} + \frac{\vec{b}}{\lambda+\mu+2} + \frac{\mu\vec{c}}{\lambda+\mu+2}.$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 5 pts.)}}$$

Como $t = u = (\lambda+1)/(\lambda+\mu+2)$, tenemos que $X = Y$ divide a PS y a QR en razón $\rho = (1-t)/t = (\mu+1)/(\lambda+1)$.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$$

2. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de los tres planos

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x - y + 2z &=& -1, \\ 3x + 2y - 2z &=& 6, \\ x + 3y + 4z &=& -5 \end{array}\right|$$

y que pasa por los puntos $(1,-3,3)$ y $(2,3,1)$.

Solución:

El punto de intersección de los tres planos dados es $(2/3, 1/3, -5/3)$.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 2 pts.)}}$$

Así, dos vectores directores del plano buscado son $(1,-3,3)-(2/3,1/3,-5/3) = (1/3,-10/3,14/3)$ y $(2,3,1)-(1,-3,3) = (1,6,-2)$.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 4 pts.)}}$$

Así, la ecuación vectorial del plano es

$$(x, y, z) = (1, -3, 3) + s(1/3, -10/3, 14/3) + t(1, 6, -2) \quad \text{con } s, t \in \mathbb{R}.$$

Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 6 pts.)

Opcionalmente, podemos obtener la ecuación cartesiana del plano, que está dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2/3 & 1/3 & -5/3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o equivalentemente,

$$4x - y - z = 4.$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución — Control N°3
Versión C

1. Sean π_1, π_2 y π_3 tres planos tales que entre ellos no hay dos paralelos.

   Demuestre que si la recta $\ell_{12} = \pi_1 \cap \pi_2$ es paralela a la recta $\ell_{23} = \pi_2 \cap \pi_3$ entonces la recta $\ell_{13} = \pi_1 \cap \pi_3$ es paralela a ambas.

   Solución:

   Supongamos que la recta $\ell_{12} = \pi_1 \cap \pi_2$ es paralela a la recta $\ell_{23} = \pi_2 \cap \pi_3$. Entonces existe un vector $\vec{d}$ que es un vector dirección común de ℓ_{12} y ℓ_{23}, o sea, ℓ_{12} y ℓ_{23} tienen por ecuaciones

   $$\ell_{12} : \vec{p} = \vec{p}_1 + t\vec{d} \qquad \text{y} \qquad \ell_{23} : \vec{p} = \vec{p}_3 + u\vec{d}$$

   respectivamente.

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)

   Sea $p_o \in \pi_1 \cap \pi_3$ (dicho punto existe ya que π_1 y π_3 no son paralelos). Los planos π_1 y π_3 contienen a p_o y al vector $\vec{d}$, por lo que sus ecuaciones deben ser de la forma

   $$\pi_1 : \vec{p} = \vec{p}_o + \alpha\vec{d} + \beta\vec{e} \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : \vec{p} = \vec{p}_o + \gamma\vec{d} + \delta\vec{f}$$

   respectivamente.

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 2 pts.)

   Ahora bien: los vectores $\vec{d}, \vec{e}$ y $\vec{f}$ deben ser l.i., ya que en caso contrario los planos π_1 y π_3 serían paralelos (si dichos vectores fueran l.d. entonces

$\vec{e}$ se escribirícomo combinación lineal de $\vec{d}$ y de $\vec{f}$, y $\vec{f}$ se escribirícomo combinación lineal de $\vec{d}$ y de $\vec{e}$).

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$

Así, si hubiera un vector $\vec{q} \in \pi_1 \cap \pi_3$ se tendría por una parte que $\vec{q} - \vec{p}_o$ es combinación lineal de $\vec{d}$ y de $\vec{e}$ y por otra que $\vec{q} - \vec{p}_o$ es combinación lineal de $\vec{d}$ y de $\vec{f}$. O sea, existirían $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{q} - \vec{p}_o \quad = \quad \alpha\vec{d} + \beta\vec{e} \quad = \quad \gamma\vec{d} + \delta\vec{f}.$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 4 pts.)}}$

Así, tendríamos que

$$(\alpha - \gamma)\vec{d} + \beta\vec{e} - \delta\vec{f} = \vec{0}.$$

Pero como $\vec{d}, \vec{e}$ y $\vec{f}$ son l.i., debe tenerse $\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta = 0$. O sea, los únicos vectores $\vec{q} \in \pi_1 \cap \pi_3$ son de la forma $\vec{q} = \vec{p}_o + \alpha\vec{d}$, que es la ecuación de la recta que pasa por p_o y tiene dirección $\vec{d}$.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 5 pts.)}}$

Finalmente, vemos que ℓ_{13} tiene vector dirección $\vec{d}$, por lo que es paralela a ℓ_{12} y a ℓ_{23}.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$

2. Considere las rectas de ecuaciones

$$\frac{2-x}{3} \quad = \quad \frac{y-1}{2} \quad = \quad \frac{2-2z}{5},$$

$$\frac{3x+1}{2} \quad = \quad \frac{2-3y}{4} \quad = \quad \frac{3z+5}{2}.$$

Demuestre que el lugar geométrico de los puntos medios de los trazos que unen dos puntos cualesquiera de estas rectas es un plano paralelo a ambas.

Solución:

Primera alternativa:

Sabemos que los puntos $P_1(2,1,1)$ y $P_2(-1/3, 2/3, -5/3)$ pertenecen uno a cada recta, y que los vectores $d_1 = (-3, 2, -5/2)$ y $d_2 = (1, -2, 1)$ son vectores directores de ellas. Sea P_o el punto medio del trazo P_1P_2, o sea, $P_o = (5/6, 5/6, -1/3)$. El plano que pasa por P_o y que es paralelo a ℓ_1 y a ℓ_2 tiene por ecuación

$$6x - y - 8z - 41/6 = 0$$

(esto puede ser calculado de varias formas, una de ellas es hallando tres puntos en dicho plano, por ejemplo p_o, $p_o + d_1$ y $p_o + d_2$ y calculando qué valores de a, b, c, d hacen que estos tres puntos satisfagan la ecuación $ax + by + cz + d = 0$).

Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 2 pts.)

Probaremos que este plano es precisamente el lugar geométrico pedido.

En estricto rigor, es necesario demostrar dos afirmaciones:

(a) Sean $Q_1(x_1, y_1, z_1)$ y $Q_2(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos, uno en cada una de las rectas dadas. Debemos demostrar que el punto medio de ellos, dado por $Q_o((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2, (z_1 + z_2)/2)$ satisface la ecuación $6x - y - 8z - 41/6 = 0$.

(b) Por otra parte, debemos demostrar que cada punto de dicho plano *es* el punto medio de dos puntos que están cada uno en una de las rectas dadas.

Sin embargo, para efectos de evaluación, aceptaremos como buena una respuesta en que se demuestre sólo una de estas dos afirmaciones.

Las demostraciones de cada parte son como sigue:

(a) Ya que

$$\frac{2 - x_1}{3} = \frac{y_1 - 1}{2} = \frac{2 - 2z_1}{5} \qquad \text{y} \qquad \frac{3x_2 + 1}{2} = \frac{2 - 3y_2}{4} = \frac{3z_2 + 5}{2},$$

se tiene que

$$y_1 = \frac{7-2x_1}{3}, \quad z_1 = \frac{5x_1-4}{6}, \quad y_2 = -2x_2 \quad \text{y} \quad z_2 = x_2 - 4/3.$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 3.5 pts.)}}$

Así,

$$\begin{aligned}
& 6\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) - 8\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \\
= \;& 3(x_1+x_2) - \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) - 4\left(z_1+z_2\right) \\
= \;& 3(x_1+x_2) - \left(\frac{\frac{7-2x_1}{3} - 2x_2}{2}\right) - 4\left(\frac{5x_1-4}{6} + x_2 - 4/3\right) \\
= \;& 3(x_1+x_2) - \frac{7-2x_1-6x_2}{6} - 4\left(\frac{5x_1-4+6x_2-8}{6}\right) \\
= \;& \frac{18(x_1+x_2) - 7 + 2x_1 + 6x_2 - 20x_1 + 16 - 24x_2 + 32}{6} \\
= \;& \frac{18x_1 + 2x_1 - 20x_1 + 18x_2 + 6x_2 - 24x_2 - 7 + 16 + 32}{6} \\
= \;& 41/6
\end{aligned}$$

que es lo que se debía demostrar.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 2.5 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$

(b) Supongamos que $Q_o(x_o, y_o, z_o)$ satisface la ecuación dada, o sea,

$$6x_o - y_o - 8z_o - 41/6 = 0. \tag{1}$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$

Debemos demostrar que existen dos puntos $Q_1(x_1, y_1, z_1)$ y $Q_2(x_2, y_2, z_2)$ tales que $Q_1 \in \ell_1$, $Q_2 \in \ell_2$, y Q_o es el punto medio de $\overline{Q_1Q_2}$.

En otras palabras, debemos probar que el sistema

$$\left.\begin{array}{rcc} x_1+x_2 & = & 2x_o \\ y_1+y_2 & = & 2y_o \\ z_1+z_2 & = & 2z_o \\ 2(2-x_1) & = & 3(y_1-1) \\ 5(2-x_1) & = & 3(2-2z_1) \\ 4(3x_2+1) & = & 2(2-3y_2) \\ 2(3x_2+1) & = & 2(3z_2+5) \end{array}\right|$$

tiene solución (considerando como incógnitas a x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 y z_2).

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 4 pts.)

Pero las últimas cuatro ecuaciones del sistema son equivalentes a

$$y_1 = \frac{7-2x_1}{3}, \quad z_1 = \frac{5x_1-4}{6}, \quad y_2 = -2x_2 \quad \text{y} \quad z_2 = x_2 - 4/3,$$

por lo que en realidad lo que importa es demostrar que el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & = & 2x_o \\ \dfrac{7-2x_1}{3} - 2x_2 & = & 2y_o \\ \dfrac{5x_1-4}{6} + x_2 - 4/3 & = & 2z_o \end{array}\right|$$

tiene solución.

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 5 pts.)

De (1) se desprende que $y_o = 6x_o - 8z_o - 41/6$, por lo que este sistema es equivalente a

$$\left.\begin{array}{rcc} x_1+x_2 & = & 2x_o \\ 7-2x_1-6x_2 & = & 36x_o-48z_o-41 \\ 5x_1-4+6x_2-8 & = & 12z_o \end{array}\right|$$

o, lo que es lo mismo, a

$$\left.\begin{array}{rcc} x_1+x_2 & = & 2x_o \\ x_1+3x_2 & = & -18x_o+24z_o+24 \\ 5x_1+6x_2 & = & 12z_o+12 \end{array}\right|$$

Al tratar de resolver este sistema, se ve que $x_1 = 12(x_o - z_o - 1)$ y $x_2 = 2(6z_o - 5x_o + 6)$ son solución, lo que concluye la demostración.

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 6 pts.)

Segunda alternativa:

Es mucho más simple atacar este problema en general, desde el punto de vista vectorial. Si ℓ_1 y ℓ_2 son las rectas de ecuaciones

$$\ell_1 : \vec{p} = \vec{p}_1 + t\vec{d}_1 \qquad \text{y} \qquad \ell_2 : \vec{p} = \vec{p}_2 + u\vec{d}_2,$$

entonces el plano que pasa por el punto medio de $\overline{P_1P_2}$ y es paralelo a ℓ_1 y a ℓ_2 tiene por ecuación

$$\pi : \vec{p} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/2 + \alpha d_1 + \beta d_2. \tag{2}$$

Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 2 pts.)

De nuevo, probaremos que este plano es el lugar geométrico buscado, o sea:

(a) Dados dos puntos $Q_1 \in \ell_1$ y $Q_2 \in \ell_2$, el punto medio del trazo $\overline{Q_1Q_2}$ satisface la ecuación de π.

(b) Por otra parte, todo punto de π es el punto medio de dos puntos que están cada uno en una de las rectas dadas.

Las demostraciones de cada parte son como sigue:

(a) Supongamos que $q_1 = \vec{p}_1 + t\vec{d}_1$ y $q_2 = \vec{p}_2 + u\vec{d}_2$ son los vectores correspondientes a los dos puntos dados.

Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 4 pts.)

Entonces el punto medio de $\overline{Q_1Q_2}$ está dado por

$$\vec{q}_o = (\vec{q}_1+\vec{q}_2)/2 = (\vec{p}_1+t\vec{d}_1+\vec{p}_2+u\vec{d}_2)/2 = (\vec{p}_1+\vec{p}_2)/2+\frac{t}{2}\vec{d}_1+\frac{u}{2}\vec{d}_2,$$

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 5 pts.)

que corresponde a la ecuación (2) con $\alpha = t/2$, $\beta = u/2$.

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 6 pts.)

(b) Sea $q_o = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/2 + \alpha d_1 + \beta d_2$.

Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 4 pts.)

Entonces claramente q_o es el punto medio de los puntos

$$q_1 = \vec{p}_1 + 2\alpha d_1 \qquad \text{y} \qquad q_2 = \vec{p}_2 + 2\beta d_2,$$

que evidentemente pertenecen a ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente.

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 6 pts.)

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 $\star$ Geometría

Control N°3
Versión D (recuperación sala A-8)

1. En un tetraedro $ABCD$, se eligen puntos $A' \in \overleftrightarrow{DA}$, $B' \in \overleftrightarrow{DB}$ y $C' \in \overleftrightarrow{DC}$ que dividen a los segmentos $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$ en una misma razón λ.

   Por el punto A' se pasa una recta ℓ_A paralela a la transversal de gravedad del triángulo DBC que une D con el punto medio de BC; por B' se pasa una recta ℓ_B paralela a la transversal de gravedad del triángulo DCA que une D con el punto medio de CA; y finalmente por C' se pasa una recta ℓ_C paralela a la transversal de gravedad del triángulo DAB que une D con el punto medio de AB.

   Demuestre que las tres recta ℓ_A, ℓ_B y ℓ_C así definidas son concurrentes (o sea, las tres pasan por el mismo punto).

   Solución:

   Sea $O = D$. Los puntos $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ y $\vec{c}'$ están dados por

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \frac{\lambda}{\lambda+1}\,\vec{a}, \\ \vec{b}' &= \frac{\lambda}{\lambda+1}\,\vec{b}, \\ \vec{c}' &= \frac{\lambda}{\lambda+1}\,\vec{c}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 1.5 pts.)}}$$

La transversal de gravedad por D del triángulo DBC tiene por ecuación

$$\vec{p} = \vec{d} + \alpha(\vec{b} + \vec{c})/2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)(\vec{b} + \vec{c}),$$

o sea, un vector director de dicha transversal es $\vec{b} + \vec{c}$. Repitiendo este razonamiento para los otros casos, obtenemos que las transversales de gravedad tienen por ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcl} T_A & : & \vec{p} & = & \alpha(\vec{b} + \vec{c}), \\ T_B & : & \vec{p} & = & \beta(\vec{c} + \vec{a}), \\ T_C & : & \vec{p} & = & \gamma(\vec{a} + \vec{b}), \end{array}$$

donde α, β y γ son reales cualesquiera.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$

Las rectas ℓ_A, ℓ_B y ℓ_C tienen por ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcccl} \ell_A & : & \vec{p} & = & \vec{a}' + \alpha(\vec{b} + \vec{c}) & = & \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}\,\vec{a} + \alpha(\vec{b} + \vec{c}), \\ \ell_B & : & \vec{p} & = & \vec{b}' + \beta(\vec{c} + \vec{a}) & = & \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}\,\vec{b} + \beta(\vec{c} + \vec{a}), \\ \ell_C & : & \vec{p} & = & \vec{c}' + \gamma(\vec{a} + \vec{b}) & = & \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}\,\vec{c} + \gamma(\vec{a} + \vec{b}). \end{array}$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 4.5 pts.)}}$

Claramente, el punto

$$\vec{q} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

pertenece a cada una de las líneas ℓ_A, ℓ_B y ℓ_C (con valores de α, β y γ dados por $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$).

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$

2. Encuentre la ecuación del plano que contiene a la recta

$$\frac{2x+1}{4} = \frac{3y+2}{2} = \frac{z+1}{3}$$

y al punto $(-1, 2, 3)$.

Solución:

Primera alternativa:

La recta dada pasa por el punto $P_o(-1/2, -2/3, -1)$

Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 1.5 pts.)

y tiene vector director $\vec{d_1} = (2, 2/3, 3)$,

Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 3 pts.)

por lo que el plano buscado pasa por el mismo punto y tiene vectores directores $\vec{d_1} = (2, 2/3, 3)$ y $\vec{d_2} = (-1, 2, 3) - (-1/2, -2/3, -1) = (-1/2, 8/3, 4)$.

Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 4.5 pts.)

Así, la ecuación de este plano puede ser escrita como

$$\vec{p} = (-1/2, -2/3, -1) + \lambda(2, 2/3, 3) + \mu(-1/2, 8/3, 4).$$

Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 6 pts.)

Segunda alternativa:

La recta dada pasa por el punto $P_o(-1/2, -2/3, -1)$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 1.5 pts.)}}$$

y tiene vector director $\vec{d_1} = (2, 2/3, 3)$.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$$

Así, el plano buscado pasa por $P_o(-1/2, -2/3, -1)$, por $P_o(-1/2, -2/3, -1) + d_1 = (-1/2, -2/3, -1) + (2, 2/3, 3) = (3/2, 0, 2)$ y por $(-1, 2, 3)$,

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 4.5 pts.)}}$$

por lo que su ecuación está dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1/2 & -2/3 & -1 & 1 \\ 3/2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o sea

$$32x + 57y - 34z + 20 = 0.$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1.5 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$$

Tercera alternativa:

Análogamente al anterior, el plano buscado pasa por $P_o(-1/2, -2/3, -1)$, por $P_o(-1/2, -2/3, -1) + d_1 = (-1/2, -2/3, -1) + (2, 2/3, 3) = (3/2, 0, 2)$ y por $(-1, 2, 3)$.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 4.5 pts. (hasta aquí: 4.5 pts.)}}$$

Así, si su ecuación es de la forma $ax + by + cz + d = 0$ entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} -1/2a - 2/3b - c + d & = & 0 \\ 3/2a + 2c + d & = & 0 \\ -a + 2b + 3c + d & = & 0 \\ \hline \end{array}\right|$$

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 5.5 pts.)}}$

de donde $a = 8d/5$, $b = 57d/20$, $c = -17d/10$.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$