Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución al Control N°4
Versión A

1. Demuestre que las raíces cúbicas de $z = 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ tienen suma nula.

Solución

$$z = 4\,(\,1 + \sqrt{3}\,) \implies z = 2\ \mathrm{cis}(\frac{\pi}{3})$$

y las raíces cúbicas de z están dadas por:

$$w_k = \sqrt[3]{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\,k\pi}{3}\right)\ ,\ k = 0, 1, 2$$

$$\implies \begin{cases} w_0 &= \sqrt[3]{2}\ \mathrm{cis}(\frac{\pi}{9}) \\ w_1 &= \sqrt[3]{2}\ \mathrm{cis}(\frac{7\,\pi}{9}) \\ w_2 &= \sqrt[3]{2}\ \mathrm{cis}(\frac{13\,\pi}{9}) \end{cases}$$

Ahora :

$$\mathrm{cis}(\frac{7\,\pi}{9}) \;=\; \mathrm{cis}(\frac{6\,\pi}{9} + \frac{\pi}{9}) \;=\; \mathrm{cis}(\frac{2\,\pi}{3})\ \mathrm{cis}(\frac{\pi}{9}) \;=\; w\ \mathrm{cis}(\frac{\pi}{9}) \qquad (1)$$

con w raíz cúbica de la unidad. Además:

$$\mathrm{cis}(\frac{13\,\pi}{9}) \;=\; \mathrm{cis}(\frac{12\,\pi}{9} + \frac{\pi}{9}) \;=\; \mathrm{cis}(\frac{4\,\pi}{3})\ \mathrm{cis}(\frac{\pi}{9}) \;=\; w^2\ \mathrm{cis}(\frac{\pi}{9}) \qquad (2)$$

con w^2 raíz cúbica de la unidad. Luego de (1) y (2):

$$w_o + w_1 + w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\operatorname{cis}(\frac{\pi}{9}) + \operatorname{cis}(\frac{7\pi}{9}) + \operatorname{cis}(\frac{13\pi}{9})\right) = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}(\frac{\pi}{9})\left(1 + w + w^2\right) = 0$$

2. Los puntos $P(z)$ y $Q(w)$ son tales que:

$$w = (4+i) + \frac{3-3i}{z-1}$$

Determine la curva que describe Q cuando P describe la circunferencia de ecuación $|z| = 1$.

Solución

$$w = (4+i) + \frac{3-3i}{z-1} \Longrightarrow w(z-1) = (4+i)(z-1) + (3-3i)$$

$$\Longrightarrow w(z-1) = (4+i)z - (1+4i)$$

$$\Longrightarrow z = \frac{w-(1+4i)}{w-(4+i)}$$

Luego si P recorre la circunferencia $|z| = 1$, entonces :

$$|z| = \left|\frac{w-(1+4i)}{w-(4+i)}\right| = 1$$

por lo tanto Q recorre la circunferencia de Apolonio de razón 1 y diámetro AB dado por $A(1+4i)$, $B(4+i)$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución al Control N°4
Versión B

1. Sean α y β tales que $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 2\pi$. Escriba en forma polar, o sea, en la forma $r \operatorname{cis}\theta$, el complejo :

$$z = (\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta) + i\,(\cos \alpha - \cos \beta)$$

Solución

$$r = |z| = \sqrt{(\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2}$$

$$= \sqrt{2 - 2\,(\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta + \cos \alpha \cos \beta)} = \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\Longrightarrow r = \sqrt{2}\,\sqrt{2 \text{ sen}^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} = 2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

pues $0 < \alpha - \beta < 2\pi \Longrightarrow 0 < \frac{\alpha-\beta}{2} < \pi \Longrightarrow \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) > 0$

Por otra parte :

$$\cos \theta = \frac{\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta}{2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{-2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = -\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow z = 2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \operatorname{cis}\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

2. Los puntos $P(z)$ y $Q(w)$ son tales que:

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

Determine la trayectoria que describe Q cuando P recorre la circunferencia $|z| = 1$

Solución

$$w = \frac{1+z}{1-z} \Longrightarrow w - w\,z = 1 + z \Longrightarrow z = \frac{w-1}{w+1}$$

Si P recorre la circunferencia $|z| = 1$, entonces :

$$|z| = \left|\frac{w-1}{w+1}\right| = 1 \Longrightarrow |w-1| = |w+1|$$

Si $w = u + vi$, entonces:

$$|(u-1)+vi| = |(u+1)+vi| \Longrightarrow \sqrt{(u-1)^2+v^2} = \sqrt{(u+1)^2+v^2}$$

$$(u-1)^2 = (u+1)^2 \longrightarrow 4\,u = 0 \Longrightarrow u = 0$$

Luego Q recorre el eje imaginario.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución al Control N°4
Versión C

1. Sea α tal que $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Escriba en forma polar, o sea, en la forma $r \operatorname{cis} \theta$, el complejo :

$$z = \cos \alpha - 1 + i \operatorname{sen} \alpha$$

Solución

$$\begin{aligned} z &= \cos \alpha - 1 + i \operatorname{sen} \alpha \\ \Longrightarrow |z| &= \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{2 - 2\cos \alpha} \\ \Longrightarrow |z| &= \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \alpha} = \sqrt{2}\sqrt{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

pues $0 < \alpha < 2\pi \Longrightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \pi \Longrightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} > 0$ Luego $r = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$

Además

$$\cos \theta = \frac{\cos \alpha - 1}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{-2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Por último:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow z = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

2. Los puntos $P(z)$ y $Q(w)$ son tales que:

$$w = i + \frac{2-i}{z-i}$$

Determine la trayectoria que describe Q cuando P recorre el eje imaginario.

Solución

$$w = i + \frac{2-i}{z-i} \Longrightarrow (z-i) = \frac{2-i}{w-i} \Longrightarrow z = \frac{2-i}{w-i} + i$$

Si $w = u + vi$, entonces :

$$z = \frac{2-i}{w-i} + i = \frac{2-i}{u+8v-19i} + i = \frac{(2-i)(u-(v-1)i}{u^2+(v-1)^2} + i$$

$$\Longrightarrow z = \frac{(2u-(v-1)) - (2(v-1)+u-u^2-8v-1)^2)i}{u^2+(v-1)^2}$$

Si z recorre el eje imaginario, entonces, $Re(z) = 0$

$$\Longrightarrow Re\left(\frac{2-i}{w-i} + i\right) = 0 \Longrightarrow 2\,u - v + 1 = 0$$

Luego Q recorre la recta $2\,x - y + 1 = 0$