Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución — Control N°5
Versión A

1. Dadas las rectas

$$\ell_1 \quad : \quad 2x - y = 0, z = 0;$$

$$\ell_2 \quad : \quad \frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{3} = \frac{3z+5}{2};$$

   (a) Calcule la distancia entre ellas.

   (b) Encuentre la ecuación de la recta perpendicular común.

   Solución:

   (a) La recta ℓ_1 pasa por el origen, y un vector director de ella es $\overrightarrow{d}_1 = (1,2,0)$ (lo primero es claro, y lo segundo puede verse ya que $x = 1 \implies y = 2 \wedge z = 0$, de donde $\overrightarrow{p}_1 = (1,2,0) \in \ell_1$).
   De las ecuaciones simétricas de ℓ_2 sacamos que ℓ_2 pasa por $\overrightarrow{p}_2 = (1/2, 1, -5/3)$ y que un vector director de ℓ_2 es $\overrightarrow{d}_2 = (3,3,2)$.
   Así, las ecuaciones de ℓ_1 y ℓ_2 pueden ser re-escritas como

$$\ell_1 \quad : \quad \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_1 + s\,\overrightarrow{d}_1;$$

$$\ell_2 \quad : \quad \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_2 + t\,\overrightarrow{d}_2.$$

   Consideremos el plano π que contiene a ℓ_1 y es paralelo a ℓ_2. Este plano tiene como vectores directores a $\overrightarrow{d}_1$ y a $\overrightarrow{d}_2$, por lo que un vector normal a π es $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2$, y un vector normal unitario es

$$\widehat{n} = \frac{\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2}{||\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2||}.$$

   Así, la ecuación de π puede ser escrita como

$$\pi \quad : \quad (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_1) \cdot \widehat{n} = 0.$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)}}$$

Es fácil ver que la distancia entre ℓ_1 y ℓ_2 es igual a la distancia constante que separa a ℓ_2 de π, por lo que es posible calcular

$$d(\ell_1, \ell_2) = d(\overrightarrow{p}_2, \pi) = (\overrightarrow{p}_2 - \overrightarrow{p}_1) \cdot \widehat{n} = \frac{\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2}{||\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2||} \cdot (\overrightarrow{p}_2 - \overrightarrow{p}_1),$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 1.5 pts.)}}$$

de donde obtenemos la expresión más simple

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{[\, \overrightarrow{d}_1 \, \overrightarrow{d}_2 \, (\overrightarrow{p}_2 - \overrightarrow{p}_1) \,]}{||\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2||},$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 2 pts.)}}$$

(b) Para hallar la perpendicular común buscamos dos puntos, $Q \in \ell_1$ y $R \in \ell_2$, tales que $\overleftrightarrow{QR}$ sea perpendicular tanto a ℓ_1 como a ℓ_2.
Sea s_o y t_o los parámetros correspondientes a Q y R respectivamente, o sea,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q} &= \overrightarrow{p}_1 + s_o \overrightarrow{d}_1, \\ \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{p}_2 + t_o \overrightarrow{d}_2. \end{aligned}$$

Ya que $(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{r}) \perp \overrightarrow{d}_1$ y $(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{r}) \perp \overrightarrow{d}_2$, debe tenerse que

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{q} - \overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{d}_1 &= 0, \\ (\overrightarrow{q} - \overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{d}_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 0.5 pts.)}}$$

Así,

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{p}_1 + s_o \overrightarrow{d}_1) \cdot \overrightarrow{d}_1 &= (\overrightarrow{p}_2 + t_o \overrightarrow{d}_2) \cdot \overrightarrow{d}_1, \\ (\overrightarrow{p}_1 + s_o \overrightarrow{d}_1) \cdot \overrightarrow{d}_2 &= (\overrightarrow{p}_2 + t_o \overrightarrow{d}_2) \cdot \overrightarrow{d}_2, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} s_o \, ||d_1||^2 - t_o (d_1 \cdot d_2) &= (\overrightarrow{p}_2 - \overrightarrow{p}_1) \cdot \overrightarrow{d}_1, \\ s_o (d_1 \cdot d_2) - t_o \, ||d_2||^2 &= (\overrightarrow{p}_2 - \overrightarrow{p}_1) \cdot \overrightarrow{d}_2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 1 pts.)}}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para s_o (el valor de t_o no es importante), obtenemos

$$s_o = \frac{||d_2||^2 (\overrightarrow{p}_2 - \overrightarrow{p}_1) \cdot \overrightarrow{d}_1 - (d_1 \cdot d_2)(\overrightarrow{p}_2 - \overrightarrow{p}_1) \cdot \overrightarrow{d}_2}{||d_1||^2 ||d_2||^2 - (d_1 \cdot d_2)^2}.$$

Finalmente, podemos expresar la ecuación de la perpendicular común como

$$\ell_\perp : \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_1 + s_o \overrightarrow{d}_1 + t(\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2).$$

2. Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{d}$ cuatro vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}\right) = \left[\, \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d} \,\right] \overrightarrow{b} - \left[\, \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d} \,\right] \overrightarrow{a}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}\right) \\
= \; & \left(\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}\right)\right) \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}\right)\right) \overrightarrow{a} \\
= \; & \left(\left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}\right) \cdot \overrightarrow{a}\right) \overrightarrow{b} - \left(\left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}\right) \cdot \overrightarrow{b}\right) \overrightarrow{a} \\
= \; & \left[\, \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}\,\overrightarrow{a} \,\right] \overrightarrow{b} - \left[\, \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}\,\overrightarrow{b} \,\right] \overrightarrow{a} \\
= \; & \left[\, \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d} \,\right] \overrightarrow{b} - \left[\, \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d} \,\right] \overrightarrow{a}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 3 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución — Control N°5
Versión B

1. Calcule la distancia entre el punto $P(1, -1, 1)$ y el plano de ecuación

$$\pi : 2x - 3y + 6z - 5 = 0.$$

Encuentre la proyección ortogonal de P sobre π.

Solución:

Un vector normal a π es $\overrightarrow{n} = (2, -3, 6)$. Al normalizarlo, obtenemos un vector normal unitario $\widehat{n} = (2/7, -3/7, 6/7)$.

Un punto por donde pasa π es $P_o = (1, -1, 0)$.

Así, la ecuación de π puede ser reescrita como

$$\pi : (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_o) \cdot \widehat{n} = 0.$$

De esta ecuación, obtenemos que la distancia a π desde un punto cualquiera Q está dada por

$$d(Q, \pi) = (\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}_o) \cdot \widehat{n}.$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)}}$$

Así, la distancia entre $P(1, -1, 1)$ y π es

$$d(P, \pi) = ((1, -1, 1) - (1, -1, 0)) \cdot (2/7, -3/7, 6/7) = (0, 0, 1) \cdot (2/7, -3/7, 6/7) = 6/7.$$

Ahora, para calcular la proyección ortogonal $Q_\perp$ de un punto cualquiera Q sobre π, queremos que $(\overrightarrow{q}_\perp - \overrightarrow{q})$ sea paralelo al vector $\widehat{n}$, o sea, queremos que

$$\overrightarrow{q}_\perp - \overrightarrow{q} = \lambda \widehat{n}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Multiplicando esta ecuación $\cdot\widehat{n}$, vemos que

$$(\overrightarrow{q}_\perp - \overrightarrow{q}) \cdot \widehat{n} = \lambda \widehat{n} \cdot \widehat{n},$$

o sea,

$$\lambda = (\overrightarrow{q}_\perp - \overrightarrow{q}) \cdot \widehat{n} = (\overrightarrow{q}_\perp - \overrightarrow{p}_o + \overrightarrow{p}_o - \overrightarrow{q}) \cdot \widehat{n} = ((\overrightarrow{q}_\perp - \overrightarrow{p}_o) + (\overrightarrow{p}_o - \overrightarrow{q})) \cdot \widehat{n}.$$

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 2 pts.)

Como $Q_\perp \in \pi$, $(\overrightarrow{q}_\perp - \overrightarrow{p}_o) \cdot \widehat{n} = 0$ y por lo tanto $\lambda = (\overrightarrow{p}_o - \overrightarrow{q}) \cdot \widehat{n}$, por lo que finalmente

$$\overrightarrow{q}_\perp = \overrightarrow{q} + \lambda \widehat{n} = \overrightarrow{q} + (\overrightarrow{p}_o - \overrightarrow{q}) \cdot \widehat{n}\widehat{n}.$$

En el caso pedido,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p}_\perp &= \overrightarrow{p} + (\overrightarrow{p}_o - \overrightarrow{p}) \cdot \widehat{n}\widehat{n} \\
&= (1,-1,1) + (((1,-1,0) - (1,-1,1)) \cdot (2/7,-3/7,6/7))(2/7,-3/7,6/7) \\
&= (1,-1,1) + ((0,0,-1) \cdot (2/7,-3/7,6/7))(2/7,-3/7,6/7) \\
&= (1,-1,1) + (-6/7)(2/7,-3/7,6/7) \\
&= (1,-1,1) + (-12/49, 18/49, -36/49) \\
&= (37/49, -31/49, 13/49).
\end{aligned}$$

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 3 pts.)

2. Demuestre que

$$\left[(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\, \overrightarrow{c}\, \overrightarrow{d}\right] + \left[(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})\, \overrightarrow{a}\, \overrightarrow{d}\right] + \left[(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a})\, \overrightarrow{b}\, \overrightarrow{d}\right] = 0.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \left[(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\, \overrightarrow{c}\, \overrightarrow{d}\right] + \left[(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})\, \overrightarrow{a}\, \overrightarrow{d}\right] + \left[(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a})\, \overrightarrow{b}\, \overrightarrow{d}\right] \\
= {} & \big((\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}\big) \cdot \overrightarrow{d} + \big((\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a}\big) \cdot \overrightarrow{d} + \big((\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}\big) \cdot \overrightarrow{d} \\
= {} & \big((\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}\big) \cdot \overrightarrow{d} \\
= {} & \big((\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{c} - (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{b} + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}\big) \cdot \overrightarrow{d} \\
= {} & \big(-(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{c} + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}\big) \cdot \overrightarrow{d} \\
= {} & \big(-(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{c} + (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}\big) \cdot \overrightarrow{d} \\
= {} & \big(\overrightarrow{0}\big) \cdot \overrightarrow{d} \\
= {} & \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

Puntaje por esta parte: 3 pts. (hasta aquí: 3 pts.)

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE DE 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución — Control N°5
Versión C

1. Calcule la distancia entre el punto $P(1,-1,1)$ y la recta dada por las ecuaciones

$$\ell : \quad 2x - 3y + 2z - 5 = 0, \quad x + 2y - z + 3 = 0.$$

Encuentre la proyección ortogonal de P sobre ℓ.

Solución:

Primera alternativa:

Buscaremos la intersección de ℓ con el plano $z = 0$. Si $z = 0$, las ecuaciones de la recta se transforman en

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5, \\ x + 2y &= -3. \end{aligned}$$

Como la solución de este sistema es $x = 1/7$, $y = -11/7$, el punto $P_o = (1/7, -11/7, 0)$ pertenece a ℓ.

$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)}}$

Los vectores normales a los planos que definen ℓ son $\widehat{n}_1 = (2,-3,2)$ y $\widehat{n}_2 = (-1,-2,1)$ (elegimos n_2 así y no como $\widehat{n}_2 = (1,2,-1)$ debido a nuestra convención de que el origen está a una distancia *negativa* del plano).

Ya que el vector director de la recta debe ser ortogonal tanto a $\widehat{n}_1$ como a $\widehat{n}_2$, dicho vector director $\overrightarrow{d}$ debe ser un ponderado de $\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2$.

Así, es posible escribir la ecuación de ℓ como

$$\ell : \quad \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_o + \lambda(\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2) = (1/7, -11/7, 0) + \lambda(1, -4, -7).$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 1.5 pts.)}}$$

Buscamos el punto $P_\perp$ en ℓ que satisface $(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_\perp) \cdot \overrightarrow{d} = 0$. Si escribimos $\overrightarrow{p}_\perp = (1/7, -11/7, 0) + t(1, -4, -7)$, esto es equivalente a

$$((1, -1, 1) - (1/7, -11/7, 0) - t(1, -4, -7)) \cdot (1, -4, -7) = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$(6/7 - t, 4/7 + 4t, 1 + 7t) \cdot (1, -4, -7) = 0,$$

o sea

$$(6/7 + t) + (-16/7 - 16t) + (-7 - 49t) = 0,$$

de donde $59/7 + 66t = 0$ y por lo tanto $t = -59/462$.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 2 pts.)}}$$

Así,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p}_\perp &= (1/7, -11/7, 0) - 59(1, -4, -7)/462 \\ &= (1/66, -35/33, 59/66). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 2.5 pts.)}}$$

y

$$d(P, \ell) = \sqrt{\frac{65}{66}}.$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$$

Segunda alternativa:

Dividiremos la demostración en dos partes: primero, construiremos un plano π que contenga a ℓ y tal que la distancia de P a π sea la misma que la de P a ℓ. Como la distancia entre P y ℓ no puede ser menor que la distancia entre P y un plano que contiene a ℓ, *el plano buscado es el que está a mayor distancia de* P. Luego, calcularemos la distancia de P a π, y hallaremos la proyección ortogonal de P a π, que será la misma que la de P a ℓ.

(a) Primero que nada, determinemos π. Mostraremos dos maneras equivalentes de hacerlo. En ambas, consideraremos el punto P_o definido en la solución anterior.

i. Para encontrar π, considerémoslo como un plano del haz de planos coaxiales con eje en ℓ, que tiene por ecuación:

$$\pi : \quad (2x - 3y + 2z - 5) + \lambda(x + 2y - z + 3) = 0.$$

Un vector normal a π es $\overrightarrow{n} = (2 + \lambda, 2\lambda - 3, 2 - \lambda)$, el punto $P_o \in \pi$, y por lo tanto la distancia de P a π está dada por

$$d(P, \pi) = \frac{(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_o) \cdot \overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||}.$$

Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 0.5 pts.)

Como el plano que buscamos es el que maximiza el valor absoluto de esta expresión (¿por qué?), podemos simplemente elevar al cuadrado y buscar el valor de λ que maximice la función:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = d(P, \pi)^2 &= \frac{((\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_o) \cdot \overrightarrow{n})^2}{||\overrightarrow{n}||^2} \\ &= \frac{((6/7, 4/7, 1) \cdot (2 + \lambda, 2\lambda - 3, 2 - \lambda))^2}{||(2 + \lambda, 2\lambda - 3, 2 - \lambda)||^2} \\ &= \frac{(2 + \lambda)^2}{17 - 12\lambda + 6\lambda^2} \end{aligned}$$

Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 1 pts.)

Como

$$f'(\lambda) = \frac{2(\lambda + 2)(29 - 18\lambda)}{6\lambda^2 - 12\lambda + 17},$$

los puntos críticos de f son $\lambda = -2$ y $\lambda = 29/18$. Es fácil ver que $\lambda = -2$ hace que $d(P, \pi) = \sqrt{f(-2)} = 0$, o sea $\lambda = -2$ corresponde al plano del haz que pasa por P.

Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 1.5 pts.)

El plano buscado es el correspondiente a $\lambda = 29/18$, que tiene vector normal

$$\overrightarrow{n} = (2+\lambda, 2\lambda-3, 2-\lambda) = (2+29/18, 2\cdot 29/18-3, 2-29/18) = (65/18, 2/9, 7/18).$$

Amplificando este vector normal, obtenemos otro,

$$\overrightarrow{n}_3 = (65, 4, 7).$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 2 pts.)}}$$

ii. El plano π contiene al vector $\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2$ dado en la primera alternativa. Como además es perpendicular al plano determinado por P_o, P y el vector $\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2$, también contiene al vector $(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_o) \times (\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2)$, y finalmente un vector normal a π es

$$\overrightarrow{n} = (\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2) \times ((\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_o) \times (\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2)).$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)}}$$

Como $\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2 = (1, -4, -7)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n} &= (\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2) \times ((\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_o) \times (\widehat{n}_1 \times \widehat{n}_2)) \\
&= (1, -4, -7) \times (((1, -1, 1) - (1/7, -11/7, 0)) \times (1, -4, -7)) \\
&= (1, -4, -7) \times ((6/7, 4/7, 1) \times (1, -4, -7)) \\
&= (1, -4, -7) \times (0, 7, -4) \\
&= (65, 4, 7).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 2 pts.)}}$$

(b) Una vez determinada la ecuación del plano buscado,

$$\pi : (\overrightarrow{p} - (1/7, -11/7, 0)) \cdot (65, 4, -7) = 0,$$

tenemos que el punto P está a distancia

$$d(P, \pi) = \frac{(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_o) \cdot \widehat{n}}{||\widehat{n}||} = \frac{65}{\sqrt{4290}} = \frac{65}{\sqrt{65 \cdot 66}} = \sqrt{\frac{65}{66}}$$

del plano π.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 2.5 pts.)}}$$

Finalmente, la proyección ortogonal de P sobre π (y por lo tanto sobre ℓ) es

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{p}_{\perp} &= \overrightarrow{p} - d(P,\pi)\widehat{n} \\
&= \overrightarrow{p} - \frac{d(P,\pi)\,\overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||} \\
&= (1,-1,1) - \frac{\sqrt{65/66}(65,4,7)}{\sqrt{4290}} \\
&= (1,-1,1) - \frac{\sqrt{65}(65,4,7)}{\sqrt{66}\sqrt{4290}} \\
&= (1,-1,1) - \frac{\sqrt{65}(65,4,7)}{\sqrt{66}\sqrt{65}\sqrt{66}} \\
&= (1,-1,1) - \frac{(65,4,7)}{66} \\
&= \frac{(66,-66,66)-(65,4,7)}{66} \\
&= (1/66,-70/66,59/66).
\end{aligned}
$$

Puntaje por esta parte: 0.5 pts. (hasta aquí: 3 pts.)

2. Demuestre que
$$\left[\,(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\,(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\,(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})\,\right] = \left[\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\right]^2.$$

   Solución:

$$
\begin{aligned}
& \left[\,(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\,(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\,(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})\,\right] \\
=\; & ((\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}))\cdot(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}) \\
=\; & \left(\left\{\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}\right\}\overrightarrow{b} - \left\{\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{b}\right\}\overrightarrow{c}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}\right) \\
=\; & \left(\left\{\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}\right\}\overrightarrow{b} - 0\,\overrightarrow{c}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}\right) \\
=\; & \left(\left[\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\right]\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}\right) \\
=\; & \left[\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\right]\left(\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}\right)\right) \\
=\; & \left[\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\right]\left(\left(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{b}\right) \\
=\; & \left[\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\right]\left[\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\right] \\
=\; & \left[\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\right]\left[\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\right] \\
=\; & \left[\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\right]^2.
\end{aligned}
$$

Puntaje por esta parte: 3 pts. (hasta aquí: 3 pts.)