MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución Control N°1 – primer turno – fila A

Pregunta 1 Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$\cos(x^2 - \pi) = 1$$

con $x \in [-6, 6]$.

Respuesta:

$\cos(x^2 - \pi) = 1 \iff x^2 - \pi = 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) $\iff x^2 = (2k+1)\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

Así, las soluciones son de la forma $x = \pm\sqrt{(2k+1)\pi}$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

Si $x \in [-6, 6]$ entonces $0 \leq x^2 \leq 36$, por lo que debe tenerse $0 \leq (2k+1)\pi \leq 36$, de donde $0 \leq 2k + 1 \leq \dfrac{36}{\pi}$.

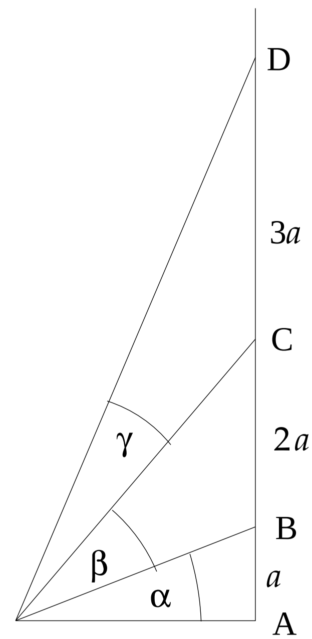
Como $11\pi \approx 34.56$ y $12\pi \approx 37.70$, vemos que $\dfrac{36}{\pi}$ está entre 11 y 12, por lo que (por ser $2k + 1$ entero) debe tenerse $0 \leq 2k + 1 \leq 11$.

Así, $0 \leq k \leq 5$ y por lo tanto las soluciones son:

$$\begin{aligned}
x = &\quad \pm\sqrt{\pi} & (k = 0),\\
x = &\quad \pm\sqrt{3\pi} & (k = 1),\\
x = &\quad \pm\sqrt{5\pi} & (k = 2),\\
x = &\quad \pm\sqrt{7\pi} & (k = 3),\\
x = &\quad \pm\sqrt{9\pi} & (k = 4),\\
x = &\quad \pm\sqrt{11\pi} & (k = 5).
\end{aligned}$$

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución Control N°1 – primer turno – fila A



Pregunta 2 En la figura, las distancias AB, BC y CD son, respectivamente, a, $2a$ y $3a$. Demuestre que

$$\tan\gamma = \frac{3\tan\alpha}{1+18\tan^2\alpha}.$$

Respuesta:

En la figura, sea O el vértice común de los ángulos α, β y γ, y sea $OA = x$.

De la figura, $\tan\alpha = \dfrac{a}{x}, \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{3a}{x}, \tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{6a}{x}$.
Así,

$$\begin{aligned}
\tan\gamma &= \tan((\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha+\beta)) \\
&= \frac{\tan(\alpha+\beta+\gamma)-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan(\alpha+\beta+\gamma)\tan(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\frac{6a}{x}-\frac{3a}{x}}{1+\frac{6a}{x}\frac{3a}{x}} = \frac{\frac{3a}{x}}{1+\frac{18a^2}{x^2}} \\
&= \frac{3\tan\alpha}{1+18\tan^2\alpha}.
\end{aligned}$$

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución Control N°1 – primer turno – fila B

Pregunta 1 Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$\operatorname{sen}(x^2 + \pi) = 0$$

con $x \in [-4, 4]$.

Respuesta:

$\operatorname{sen}(x^2 + \pi) = 0 \iff x^2 + \pi = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) $\iff x^2 = (k-1)\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$)
Si $x \in [-4, 4]$ entonces $0 \leq x^2 \leq 16$, por lo que debe tenerse $0 \leq (k-1)\pi \leq 16$, de donde $1 \leq k \leq \dfrac{16}{\pi} + 1$.

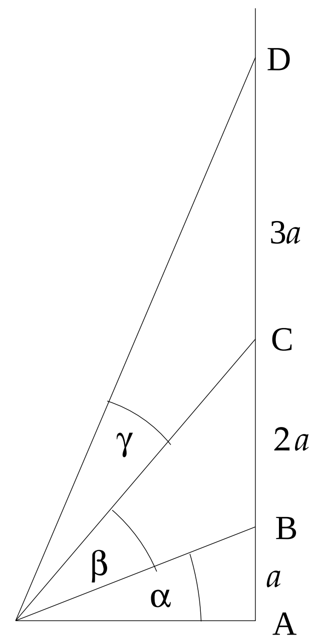
Como $5\pi \approx 15.71$ y $6\pi \approx 18.85$, vemos que $\dfrac{16}{\pi}$ está entre 5 y 6, por lo que (por ser k entero) debe tenerse $1 \leq k \leq 6$.

Así, $1 \leq k \leq 6$ y por lo tanto las soluciones son:

$$\begin{array}{rcl} x = & 0 & (k = 1), \\ x = & \pm\sqrt{\pi} & (k = 2), \\ x = & \pm\sqrt{2\pi} & (k = 3), \\ x = & \pm\sqrt{3\pi} & (k = 4), \\ x = & \pm\sqrt{4\pi} & (k = 5), \\ x = & \pm\sqrt{5\pi} & (k = 6). \end{array}$$

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución Control N°1 – primer turno – fila B



Pregunta 2 En la figura, las distancias AB, BC y CD son, respectivamente, a, $2a$ y $3a$. Demuestre que

$$\cot\gamma = \frac{\cot^2\alpha + 18}{3\cot\alpha}.$$

Respuesta:

En la figura, sea O el vértice común de los ángulos α, β y γ, y sea $OA = x$.

De la figura, $\cot\alpha = \dfrac{x}{a}, \cot(\alpha+\beta) = \dfrac{x}{3a}, \cot(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{x}{6a}$.
Así,

$$\begin{aligned}
\cot\gamma &= \cot((\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha+\beta)) \\
&= \frac{\cot(\alpha+\beta+\gamma)\cot(\alpha+\beta)+1}{\cot(\alpha+\beta)-\cot(\alpha+\beta+\gamma)} \\
&= \frac{\frac{x}{6a}\frac{x}{3a}+1}{\frac{x}{3a}-\frac{x}{6a}} = \frac{\frac{x^2}{18a^2}+1}{\frac{x}{6a}} = \frac{\frac{x^2}{a^2}+18}{\frac{3x}{a}} \\
&= \frac{\cot^2\alpha+18}{3\cot\alpha}.
\end{aligned}$$

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución Control N°1 – segundo turno – fila A

Pregunta 1 Encuentre todas las soluciones de

$$\cos(\pi \operatorname{sen} x) = 0$$

entre 0 y 2π.

Respuesta:

$\cos(\pi \operatorname{sen} x) = 0 \iff \pi \operatorname{sen} x = (2k+1)\pi/2$ (con $k \in \mathbb{Z}$) $\iff \operatorname{sen} x = k + \dfrac{1}{2}$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

Como $-1 \leq \sin x \leq 1$, debe tenerse $-1 \leq k + \dfrac{1}{2} \leq 1$, de donde $-\dfrac{3}{2} \leq k \leq \dfrac{1}{2}$.

Por ser k entero, los únicos valores posibles de k son -1 y 0.

Si $k = 0$, buscamos las soluciones de $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ entre 0 y 2π; éstas son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$.

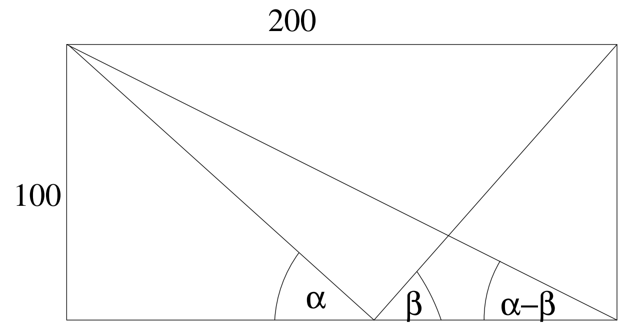
Si $k = -1$, buscamos las soluciones de $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$ entre 0 y 2π; éstas son $x = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6$ y $x = 2\pi - 5\pi/6 = 7\pi/6$.

Así, las soluciones buscadas son $\pi/6$, $5\pi/6$, $11\pi/6$ y $7\pi/6$.

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución Control N°1 – segundo turno – fila A

Pregunta 2 En la figura, el rectángulo mide 100 m. de alto y 200 m. de ancho. Encuentre los valores de $\tan\alpha$ y $\tan\beta$.



Respuesta:

En la figura, sea O el vértice común de los ángulos α y β, sea x la parte de la base del rectángulo a la izquierda de O.

De la figura, $\tan\alpha = \dfrac{100}{x}, \tan\beta = \dfrac{100}{200-x}$ y $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{100}{200} = \dfrac{1}{2},$.
Así, tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \tan(\alpha-\beta) \\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{\dfrac{100}{x} - \dfrac{100}{200-x}}{1 + \dfrac{100}{x}\cdot\dfrac{100}{200-x}} \\ &= \frac{100(200-x) - 100x}{x(200-x)+100^2}, \end{aligned}$$

de donde $x(200-x)+100^2 = 200(200-x) - 200x$. Simplificando esta ecuación, se llega a

$$x^2 - 600x + 30000 = 0,$$

de donde $x = 300 \pm 100\sqrt{6}$. Como $x < 200$, el signo $\pm$ debe ser $-$, o sea, $x = 300 - 100\sqrt{6}$.
Así, finalmente,

$$\tan\alpha = \frac{100}{300-100\sqrt{6}} = \frac{1}{3-\sqrt{6}} \quad \text{y} \quad \tan\beta = \frac{100}{100\sqrt{6}-100} = \frac{1}{\sqrt{6}-1}.$$

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución Control N°1 – segundo turno – fila B

Pregunta 1 Encuentre todas las soluciones de

$$\operatorname{sen}(\pi \cos x) = 0$$

entre 0 y 2π.

Respuesta:

$\operatorname{sen}(\pi \cos x) = 0 \iff \pi \cos x = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) $\iff \cos x = k$ (con $k \in \mathbb{Z}$).
Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, debe tenerse $-1 \leq k \leq 1$.

Por ser k entero, los únicos valores posibles de k son $-1, 0$ y 1.

Si $k = -1$, buscamos las soluciones de $\cos x = -1$ entre 0 y 2π; la única solución posible en este caso es $x = \pi$.

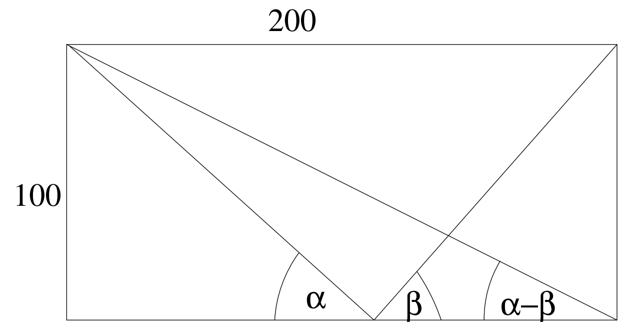
Si $k = 0$, buscamos las soluciones de $\cos x = 0$ entre 0 y 2π; éstas son $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$.

Si $k = 1$, buscamos las soluciones de $\cos x = 0$ entre 0 y 2π; éstas son $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Así, las soluciones buscadas son 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ y 2π.

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución Control N°1 – segundo turno – fila B



Pregunta 2 En la figura, el rectángulo mide 100 m. de alto y 200 m. de ancho. Encuentre los valores de $\cot\alpha$ y $\cot\beta$.

Respuesta:

En la figura, sea O el vértice común de los ángulos α y β, sea x la parte de la base del rectángulo a la izquierda de O.

De la figura, $\tan\alpha = \dfrac{100}{x}, \tan\beta = \dfrac{100}{200-x}$ y $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{100}{200} = \dfrac{1}{2}, .$
Así, tenemos la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\
&= \frac{\dfrac{100}{x} - \dfrac{100}{200-x}}{1+\dfrac{100}{x}\cdot\dfrac{100}{200-x}} \\
&= \frac{100(200-x)-100x}{x(200-x)+100^2},
\end{aligned}$$

de donde $x(200-x)+100^2 = 200(200-x)-200x$. Simplificando esta ecuación, se llega a

$$x^2 - 600x + 30000 = 0,$$

de donde $x = 300 \pm 100\sqrt{6}$. Como $x < 200$, el signo $\pm$ debe ser $-$, o sea, $x = 300 - 100\sqrt{6}$.
Así, finalmente,

$$\tan\alpha = \frac{100}{300-100\sqrt{6}} \quad \text{y} \quad \tan\beta = \frac{100}{100\sqrt{6}-100},$$

o sea,

$$\cot\alpha = \frac{300-100\sqrt{6}}{100} = 3-\sqrt{6} \quad \text{y} \quad \tan\beta = \frac{100\sqrt{6}-100}{100} = \sqrt{6}-1.$$