PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2002.

Control N°2

Primer turno - Fila A

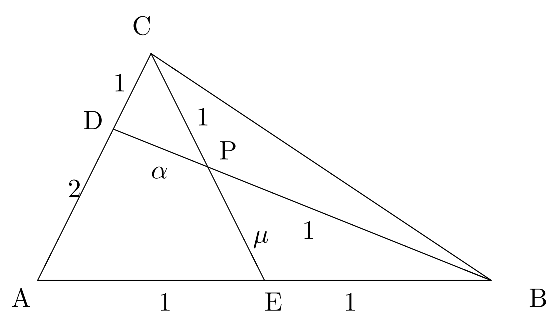
1. Sea ABC un triángulo. Sean E el punto medio de $\overline{AB}$, D el punto de trisección de $\overline{AC}$ más cercano a C, y P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CE}$ y $\overleftrightarrow{BD}$.

   Encuentre dos números reales s y t tales que

   $$\overrightarrow{\mathbf{p}} = s\ \overrightarrow{\mathbf{a}} + t\ \overrightarrow{\mathbf{b}} + (1-s-t)\ \overrightarrow{\mathbf{c}}\ .$$

   Encuentre las razones en que P divide a $\overline{BD}$ y a $\overline{CE}$.

   Solución



Ubicando el origen en A (por ejemplo), entonces $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son l.i. y se tiene:

$\vec{e} = \dfrac{\vec{b}}{2}$, $\vec{d} = \dfrac{2\,\vec{c}}{3}$

$\vec{p} = \dfrac{\mu\,\vec{c} + \vec{e}}{1+\mu}$

$\vec{p} = \dfrac{\vec{d} + \alpha\vec{b}}{1+\alpha}$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \vec{p} & = & \frac{\mu}{1+\mu}\vec{c} + \frac{1}{2(1+\mu)}\vec{b} \\ \\ \vec{p} & = & \frac{2}{3(1+\alpha)}\vec{c} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b} \end{array} \right. \qquad (*)$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mu}{1+\mu} & = & \frac{2}{3(1+\alpha)} \\ \frac{1}{2(1+\mu)} & = & \frac{\alpha}{1+\alpha} \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{3}\ ,\ \mu = 1$$

Luego P divide a $\bar{BD}$ en la razón $3:1$ y a $\bar{CE}$ en la razón $1:1$

Ahora de $(*)$ se tiene que: $\vec{p} = \dfrac{\vec{c}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{4}$

Esta expresión se obtiene considerando el origen en A, considerando ahora un origen cualquiera obtenemos:

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}-\vec{a}}{4} \quad \Longrightarrow \vec{p} = \frac{\vec{a}}{4} + \frac{\vec{b}}{4} + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{1}{4}\,\vec{a} + \frac{1}{4}\,\vec{b} + (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4})\,\vec{c} = \frac{1}{4}\,\vec{a} + \frac{1}{4}\,\vec{b} + \frac{1}{2}\,\vec{c}$$

2. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores en el espacio. Demuestre que si $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son linealmente independientes entonces ninguno de ellos es combinación lineal de los otros dos.

   Solución

   Supongamos por el contrario que uno de ellos es combinación lineal de los otros dos.Digamos:

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

$$\Longrightarrow (-1)\vec{a} + \alpha\vec{b} + \gamma\vec{c} = \theta$$

   Luego existen escalares no todos nulos tales es posible obtener una combinación lineal igual al vector nulo con $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \gamma\vec{c}$

   Por lo tanto $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \gamma\vec{c}$ son linealmente dependientes.

   Así hemos probado que si uno de los vectores es combinación lineal de los otros dos, entonces son son linealmente dependientes.Lo que es equivalente a probar que si los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son son linealmente independientes entonces ninguno de ellos es combinación lineal de los otros dos.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2002.

Control N°2

Segundo turno - Fila A

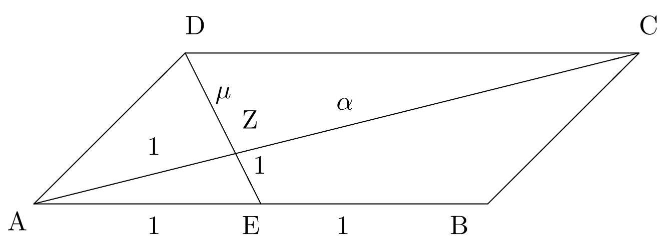
1. Sea $ABCD$ un paralelógramo. Sean E el punto medio de $\overline{AB}$, y sea Z el punto en que se cortan $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

   Encuentre dos números reales s y t tales que

   $$\overrightarrow{\mathbf{z}} = s\ \overrightarrow{\mathbf{a}} + t\ \overrightarrow{\mathbf{b}} + (1-s-t)\ \overrightarrow{\mathbf{c}}\ .$$

   Encuentre las razones en que Z divide a $\overline{AC}$ y a $\overline{DE}$.

   Solución



Ubicando el origen en A (por ejemplo), entonces $\vec{b}$ y $\vec{d}$ son l.i. y se tiene:

$\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$

$\vec{e} = \dfrac{\vec{b}}{2}$

$\vec{z} = \dfrac{\mu\,\vec{e} + \vec{d}}{1+\mu}$

$\vec{z} = \dfrac{\vec{c}}{1+\alpha}$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \vec{z} & = & \frac{\mu}{2(1+\mu)}\vec{b} + \frac{1}{1+\mu}\vec{d} \\ \vec{z} & = & \frac{1}{1+\alpha}\vec{b} + \frac{1}{1+\alpha}\vec{d} \end{array} \right. \qquad (*)$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mu}{2(1+\mu)} & = & \frac{1}{1+\alpha} \\ \frac{1}{1+\mu} & = & \frac{1}{1+\alpha} \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \mu = 2\ ,\ \alpha = 2$$

Luego Z divide a $\bar{AC}$ en la razón $1:2$ y a $\bar{DE}$ en la razón $2:1$

Ahora de $(*)$ se tiene que: $\vec{z} = \dfrac{\vec{b}}{3} + \dfrac{\vec{d}}{3} = \dfrac{\vec{c}}{3}$.

Esta expresión se obtiene considerando el origen en A, considerando ahora un origen cualquiera obtenemos:

$$\vec{z} - \vec{a} = \frac{\vec{c} - \vec{a}}{3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z} = \frac{2\vec{a}}{3} + \frac{\vec{c}}{3} = \frac{2}{3}\vec{a} + 0\,\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

2. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores linealmente independientes . Demuestre que los vectores $\vec{x} = 2\,\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = 5\,\vec{a} - 3\,\vec{b}$ son linealmente independientes.

Solución

$$\begin{aligned}
\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y} = \theta &\Longrightarrow \alpha\,(2\,\vec{a} + \vec{b}) + \beta\,(5\,\vec{a} - 3\,\vec{b}) = \theta \\
&\Longrightarrow 2\,\alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b} + 5\,\beta\,\vec{a} - 3\,\beta\vec{b} = \theta \\
&\Longrightarrow (2\,\alpha + 5\,\beta)\,\vec{a} + (\alpha - 3\,\beta)\,\vec{b} = \theta
\end{aligned}$$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes, entonces:

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} 2\,\alpha + 5\,\beta & = & 0 \\ \alpha - 3\,\beta & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{x} \text{ e } \vec{y} \quad \text{son linealmente independientes}$$