Solución y pauta de corrrección Control N°3

Distribución de puntaje

1. Cada pregunta vale 1.2 puntos.
2. Al total del puntaje obtenido por preguntas correctas se le suma un punto base.
3. Respecto al tratamiento de las preguntas incorrectas: no se bajará puntaje por ellas.

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución al Control N°3 – primer turno – forma A

Viernes 3 de Mayo, 2002

Para las preguntas 1 a 4, considere los puntos $O = (0,0,0,0), P = (-1,1,1,1), Q = (0,0,2,2), R = (1,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Anotaremos $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OR}$

Pregunta 1. El ángulo α entre $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{q}$ es:

(a)	$\alpha = \pi/3$	(b)	$\alpha = \pi/4$	(c)	$\alpha = \pi/6$
(d)	$\alpha = 2\pi/3$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{q}$ es Arccos $\left(\dfrac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}}{\left\|\overrightarrow{p}\right\| \left\|\overrightarrow{q}\right\|}\right)$, o sea,

$$\text{Arccos}\left(\frac{4}{\sqrt{4}\sqrt{8}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Así, la respuesta correcta es (b).

Pregunta 2. La proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{p}$ es el vector:

(a)	$(0,0,1,1)$	(b)	$\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$	(c)	$(1,1,1,1)$
(d)	$\frac{1}{2}(1,1,1,1)$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: La proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{p}$ es $\overrightarrow{q_p} = (\overrightarrow{q} \cdot \widehat{p})\widehat{p}$. Como $\left\|\overrightarrow{p}\right\| = \sqrt{4} = 2$, $\widehat{p} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p}$ y por lo tanto $\overrightarrow{q_p} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p})\overrightarrow{p} = \frac{1}{4}(4)\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p} = (-1,1,1,1)$.

Así, la respuesta correcta es (e).

Pregunta 3. La altura trazada desde el vértice Q del triángulo OPQ es

(a)	2	(b)	$\sqrt{2}$	(c)	$\sqrt{3}$
(d)	1	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: Los extremos de la altura buscada son Q y Q_p (la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{p}$). Así, el largo de la altura buscada es $\left\|\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_p}\right\| = \|(0,0,2,2) - (-1,1,1,1)\| = \|(1,-1,1,1)\| = \sqrt{4} = 2$.

Así, la respuesta correcta es (a).

Pregunta 4. Sea π el plano en $\mathbb{R}^4$ generado por $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{q}$ Entonces un vector que junto a $\overrightarrow{p}$ completa una base ortogonal de π es:

(a)	(1,1,-1,1)	(b)	(1,1,1,-1)	(c)	(1,-1,-1,-1)
(d)	(1,-1,1,1)	(e)	Ninguno de las anteriores		

Solución: El vector buscado es un múltiplo de $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_p}$ (donde Q_p es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{p}$). Ya sabemos que $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_p} = (1,-1,1,1)$, por lo que la respuesta correcta es (d).

Pregunta 5. Si el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ es A, entonces el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2a+b & 3c-b & c \\ 2d+e & 3f-e & f \\ 2g+h & 3i-h & i \end{vmatrix}$ es:

(a)	$-2A$	(b)	$-6A$	(c)	$3A$
(d)	$6A$	(e)	Ninguna de las anteriores		

Solución: La respuesta correcta es (a).

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución al Control N°3 – primer turno – forma B

Viernes 3 de Mayo, 2002

Para las preguntas 1 a 4, considere los puntos $O = (0,0,0,0), P = (-1,1,1,1), Q = (0,0,2,2), R = (1,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Anotaremos $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OR}$

Pregunta 1. El ángulo α entre $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{r}$ es:

(a)	$\alpha = \pi/3$	(b)	$\alpha = \pi/4$	(c)	$\alpha = \pi/6$
(d)	$\alpha = 2\pi/3$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{r}$ es Arccos $\left(\frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r}}{\left\|\overrightarrow{p}\right\| \left\|\overrightarrow{r}\right\|}\right)$, o sea,

$$\text{Arccos}\left(\frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{4}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{2}{2 \cdot 2}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Así, la respuesta correcta es (a).

Pregunta 2. La proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{r}$ es el vector:

(a)	$(0,0,1,1)$	(b)	$\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$	(c)	$(1,1,1,1)$
(d)	$\frac{1}{2}(1,1,1,1)$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: La proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{r}$ es $\overrightarrow{q_r} = (\overrightarrow{q} \cdot \widehat{r})\widehat{r}$. Como $\left\|\overrightarrow{r}\right\| = \sqrt{4} = 2$, $\widehat{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r}$ y por lo tanto $\overrightarrow{q_r} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{r})\overrightarrow{r} = \frac{1}{4}(4)\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r} = (1,1,1,1)$.

Así, la respuesta correcta es (c).

Pregunta 3. La altura trazada desde el vértice Q del triángulo OQR es

(a)	2	(b)	$\sqrt{2}$	(c)	$\sqrt{3}$
(d)	1	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: Los extremos de la altura buscada son Q y Q_r (la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{r}$). Así, el largo de la altura buscada es $\left\|\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_r}\right\| = \|(0,0,2,2) - (1,1,1,1)\| = \|(-1,-1,1,1)\| = 2$.

Así, la respuesta correcta es (a).

Pregunta 4. Sea π el plano en $\mathbb{R}^4$ generado por $\overrightarrow{q}$ y $\overrightarrow{r}$ Entonces un vector que junto a $\overrightarrow{r}$ completa una base ortogonal de π es:

(a)	(1,1,-1,1)	(b)	(1,1,1,-1)	(c)	(1,-1,-1,-1)
(d)	(-1,-1,1,1)	(e)	Ninguno de las anteriores		

Solución: El vector buscado es un múltiplo de $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_r}$ (donde Q_r es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{r}$). Ya sabemos que $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_r} = (0,0,2,2) - (1,1,1,1) = (-1,-1,1,1)$, por lo que la respuesta correcta es (d).

Pregunta 5. Si el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ es A, entonces el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3c-b & c & 2a+b \\ 3f-e & f & 2d+e \\ 3i-h & i & 2g+h \end{vmatrix}$ es:

(a)	$2A$	(b)	$-6A$	(c)	$3A$
(d)	$6A$	(e)	Ninguna de las anteriores		

Solución: El determinante vale $-2A$. La respuesta correcta es (e).

MAT 1102 $\star$ Geometría

Solución al Control N°3 – primer turno – forma C

Viernes 3 de Mayo, 2002

Para las preguntas 1 a 4, considere los puntos $O = (0,0,0,0), P = (-1,1,1,1), Q = (0,0,2,2), R = (1,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Anotaremos $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OR}$

Pregunta 1. El ángulo α entre $\overrightarrow{q}$ y $\overrightarrow{r}$ es:

(a)	$\alpha = \pi/3$	(b)	$\alpha = \pi/4$	(c)	$\alpha = \pi/6$
(d)	$\alpha = 2\pi/3$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{q}$ y $\overrightarrow{r}$ es Arccos $\left(\dfrac{\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{r}}{\left\|\overrightarrow{q}\right\| \left\|\overrightarrow{r}\right\|}\right)$, o sea,

$$\text{Arccos}\left(\frac{4}{\sqrt{8}\sqrt{4}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Así, la respuesta correcta es (b).

Pregunta 2. La proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{q}$ es el vector:

(a)	$(0,0,1,1)$	(b)	$\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$	(c)	$(1,1,1,1)$
(d)	$\frac{1}{2}(1,1,1,1)$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: La proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{q}$ es $\overrightarrow{p_q} = (\overrightarrow{p} \cdot \widehat{q})\widehat{q}$. Como $\left\|\overrightarrow{q}\right\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\widehat{q} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{q}$ y por lo tanto $\overrightarrow{p_q} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q})\overrightarrow{q} = \frac{1}{8}(4)\overrightarrow{q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{q} = (0,0,1,1)$.

Así, la respuesta correcta es (a).

Pregunta 3. La altura trazada desde el vértice P del triángulo OPQ es

(a)	2	(b)	$\sqrt{2}$	(c)	$\sqrt{3}$
(d)	1	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: Los extremos de la altura buscada son P y P_q (la proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{q}$). Así, el largo de la altura buscada es $\left\|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_q}\right\| = \|(-1,1,1,1) - (0,0,1,1)\| = \|(-1,1,0,0)\| = \sqrt{2}$.

Así, la respuesta correcta es (b).

Pregunta 4. Sea π el plano en $\mathbb{R}^4$ generado por $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{r}$ Entonces un vector que junto a $\overrightarrow{p}$ completa una base ortogonal de π es:

(a)	(1,1,-1,1)	(b)	(1,1,1,-1)	(c)	$\frac{1}{2}(3,1,1,1)$
(d)	(1,-1,1,1)	(e)	Ninguno de las anteriores		

Solución: El vector buscado es un múltiplo de $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_p}$ (donde R_p es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{r}$ sobre $\overrightarrow{p}$). Calculamos $\overrightarrow{r_p}$: $\overrightarrow{r_p} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p})\overrightarrow{p} = \frac{1}{4}(2)\overrightarrow{p} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p} = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$. Así, $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_p} = (1,1,1,1) - \frac{1}{2}(-1,1,1,1) = \frac{1}{2}(3,1,1,1)$, por lo que la respuesta correcta es (c).

Pregunta 5. Si el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ es A, entonces el valor del determinante $\begin{vmatrix} c & 3c-b & 2a+b \\ f & 3f-e & 2d+e \\ i & 3i-h & 2g+h \end{vmatrix}$ es:

(a)	$2A$	(b)	$-6A$	(c)	$-2A$
(d)	$3A$	(e)	Ninguna de las anteriores		

Solución: El determinante vale $2A$. La respuesta correcta es (a).

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución al Control N°3 – primer turno – forma D

Viernes 3 de Mayo, 2002

Pregunta 1. Si el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ es A, entonces el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2a+b & 3c-b & c \\ 2d+e & 3f-e & f \\ 2g+h & 3i-h & i \end{vmatrix}$ es:

(a)	$-2A$	(b)	$-6A$	(c)	$2A$
(d)	$6A$	(e)	Ninguna de las anteriores		

Solución: El determinante vale $-2A$. La respuesta correcta es (a).

Para las preguntas 2 a 5, considere los puntos $O = (0,0,0,0), P = (-1,1,1,1), Q = (0,0,2,2), R = (1,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Anotaremos $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OR}$

Pregunta 2. El ángulo α entre $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{p}$ es:

(a)	$\alpha = \pi/3$	(b)	$\alpha = \pi/4$	(c)	$\alpha = \pi/6$
(d)	$\alpha = 2\pi/3$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{p}$ es Arccos $\left(\dfrac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\left\|\overrightarrow{r}\right\| \left\|\overrightarrow{p}\right\|}\right)$, o sea,

$$\text{Arccos}\left(\frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{4}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{2}{2 \cdot 2}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Así, la respuesta correcta es (a).

Pregunta 3. La proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{r}$ es el vector:

(a)	$(0,0,1,1)$	(b)	$\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$	(c)	$(1,1,1,1)$
(d)	$\frac{1}{2}(1,1,1,1)$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: La proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{r}$ es $\overrightarrow{p_r} = (\overrightarrow{p} \cdot \widehat{r})\widehat{r}$. Como $\left\|\overrightarrow{r}\right\| = \sqrt{4} = 2$, $\widehat{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r}$ y por lo tanto $\overrightarrow{p_r} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r})\overrightarrow{r} = \frac{1}{4}(2)\overrightarrow{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$.
Así, la respuesta correcta es (d).

Pregunta 4. La altura trazada desde el vértice P del triángulo OPR es

(a)	2	(b)	$\sqrt{2}$	(c)	$\sqrt{3}$
(d)	1	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: Los extremos de la altura buscada son P y P_r (la proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{r}$). Así, el largo de la altura buscada es $\left\|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_r}\right\| = \left\|(-1,1,1,1) - (\frac{1}{2}(1,1,1,1)\right\| = \left\|(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\| = \sqrt{3}$.
Así, la respuesta correcta es (c).

Pregunta 5. Sea π el plano en $\mathbb{R}^4$ generado por $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{q}$ Entonces un vector que junto a $\overrightarrow{p}$ completa una base ortogonal de π es:

(a)	(1,1,-1,1)	(b)	(1,1,1,-1)	(c)	(1,-1,-1,-1)
(d)	(1,-1,1,1)	(e)	Ninguno de las anteriores		

Solución: El vector buscado es un múltiplo de $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_p}$ (donde Q_p es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{p}$). Calculamos $\overrightarrow{q}_p$: $\overrightarrow{q_p} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p})\overrightarrow{p} = \frac{1}{4}(4)\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p} = (-1,1,1,1)$, por lo que $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_p} = (1,-1,1,1)$, y así lo que la respuesta correcta es (d).

MAT 1102 $\star$ Geometría

Solución al Control N°3 – segundo turno – forma E

Viernes 3 de Mayo, 2002

Para las preguntas 1 a 4, considere los puntos $O = (0,0,0,0), P = (-1,1,1,1), Q = (0,0,2,2), R = (1,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Anotaremos $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OR}$

Pregunta 1. El ángulo α entre $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{q}$ es:

(a)	$\alpha = \pi/3$	(b)	$\alpha = \pi/4$	(c)	$\alpha = \pi/6$
(d)	$\alpha = 2\pi/3$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{q}$ es Arccos $\left(\dfrac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{q}}{\left\|\overrightarrow{r}\right\| \left\|\overrightarrow{q}\right\|}\right)$, o sea,

$$\text{Arccos}\left(\frac{4}{\sqrt{4}\sqrt{8}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Así, la respuesta correcta es (b).

Pregunta 2. La proyección ortogonal de $\overrightarrow{r}$ sobre $\overrightarrow{p}$ es el vector:

(a)	$(0,0,1,1)$	(b)	$\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$	(c)	$(1,1,1,1)$
(d)	$\frac{1}{2}(1,1,1,1)$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: La proyección ortogonal de $\overrightarrow{r}$ sobre $\overrightarrow{p}$ es $\overrightarrow{r_p} = (\overrightarrow{r} \cdot \widehat{p})\widehat{p}$. Como $\left\|\overrightarrow{p}\right\| = \sqrt{4} = 2$, $\widehat{p} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p}$ y por lo tanto $\overrightarrow{r_p} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p})\overrightarrow{p} = \frac{1}{4}(2)\overrightarrow{p} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p} = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$.
Así, la respuesta correcta es (b).

Pregunta 3. La altura trazada desde el vértice Q del triángulo OQR es

(a)	2	(b)	$\sqrt{2}$	(c)	$\sqrt{3}$
(d)	1	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: Como

$$\cos\angle QOR = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

se tiene que sen$\angle QOR = \frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que la altura buscada es

$$\left\|\overrightarrow{q}\right\| \operatorname{sen}\angle QOR = 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

Así, la respuesta correcta es (a).

Pregunta 4. Sea π el plano en $\mathbb{R}^4$ generado por $\overrightarrow{q}$ y $\overrightarrow{r}$ Entonces un vector que junto a $\overrightarrow{r}$ completa una base ortogonal de π es:

(a)	(1,1,-1,1)	(b)	(1,1,1,-1)	(c)	(1,-1,-1,-1)
(d)	(1,-1,1,1)	(e)	Ninguno de las anteriores		

Solución: El vector buscado es un múltiplo de $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_r}$ (donde Q_r es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre $\overrightarrow{r}$). Calculamos $\overrightarrow{q_r}$: $\overrightarrow{q_r} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{r})\overrightarrow{r} = \frac{1}{4}(4)\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r} = (1,1,1,1)$, por lo que $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q_r} = (0,0,2,2) - (1,1,1,1) = (-1,-1,1,1)$, y así la respuesta correcta es (e).

Pregunta 5. Si el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ es A, entonces el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3c-b & c & 2a+b \\ 3f-e & f & 2d+e \\ 3i-h & i & 2g+h \end{vmatrix}$ es:

(a)	A	(b)	$-6A$	(c)	$3A$
(d)	$6A$	(e)	Ninguna de las anteriores		

Solución: El determinante vale $-2A$. La respuesta correcta es (e).

MAT 1102 $\star$ Geometría

Solución al Control N°3 – segundo turno – forma F

Viernes 3 de Mayo, 2002

Para las preguntas 1 a 4, considere los puntos $O = (0,0,0,0), P = (-1,1,1,1), Q = (0,0,2,2), R = (1,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Anotaremos $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OR}$

Pregunta 1. El ángulo α entre $\overrightarrow{q}$ y $\overrightarrow{p}$ es:

(a)	$\alpha = \pi/3$	(b)	$\alpha = \pi/4$	(c)	$\alpha = \pi/6$
(d)	$\alpha = 2\pi/3$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{q}$ y $\overrightarrow{p}$ es Arccos $\left(\dfrac{\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p}}{\left\|\overrightarrow{q}\right\| \left\|\overrightarrow{p}\right\|}\right)$, o sea,

$$\text{Arccos}\left(\frac{4}{\sqrt{8}\sqrt{4}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Así, la respuesta correcta es (b).

Pregunta 2. La proyección ortogonal de $\overrightarrow{r}$ sobre $\overrightarrow{q}$ es el vector:

(a)	$(0,0,1,1)$	(b)	$\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$	(c)	$(1,1,1,1)$
(d)	$\frac{1}{2}(1,1,1,1)$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: La proyección ortogonal de $\overrightarrow{r}$ sobre $\overrightarrow{q}$ es $\overrightarrow{r_q} = (\overrightarrow{r} \cdot \widehat{q})\widehat{q}$. Como $\left\|\overrightarrow{q}\right\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\widehat{q} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{q}$ y por lo tanto $\overrightarrow{r_q} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{q})\overrightarrow{q} = \frac{1}{8}(4)\overrightarrow{q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{q} = (0,0,1,1)$.

Así, la respuesta correcta es (a).

Pregunta 3. La altura trazada desde el vértice R del triángulo OQR es

(a)	2	(b)	$\sqrt{2}$	(c)	$\sqrt{3}$
(d)	1	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: Los extremos de la altura buscada son R y R_q (la proyección ortogonal de $\overrightarrow{r}$ sobre $\overrightarrow{q}$). Así, el largo de la altura buscada es $\left\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_q}\right\| = \|(1,1,1,1) - (0,0,1,1)\| = \|(1,1,0,0)\| = \sqrt{2}$.

Así, la respuesta correcta es (b).

Pregunta 4. Sea π el plano en $\mathbb{R}^4$ generado por $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{r}$ Entonces un vector que junto a $\overrightarrow{p}$ completa una base ortogonal de π es:

(a)	(1,1,-1,1)	(b)	(1,1,1,-1)	(c)	(1,-1,-1,-1)
(d)	(1,-1,1,1)	(e)	Ninguno de las anteriores		

Solución: El vector buscado es un múltiplo de $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_p}$ (donde R_p es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{r}$ sobre $\overrightarrow{p}$). Calculamos $\overrightarrow{r_p}$: $\overrightarrow{r_p} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p})\overrightarrow{p} = \frac{1}{4}(2)\overrightarrow{p} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p} = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$. Así, $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_p} = (1,1,1,1) - \frac{1}{2}(-1,1,1,1) = \frac{1}{2}(3,1,1,1)$, por lo que la respuesta correcta es (e).

Pregunta 5. Si el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ es A, entonces el valor del determinante $\begin{vmatrix} c & 3c-b & 2a+b \\ f & 3f-e & 2d+e \\ i & 3i-h & 2g+h \end{vmatrix}$ es:

(a)	A	(b)	$-6A$	(c)	$3A$
(d)	$6A$	(e)	Ninguna de las anteriores		

Solución: El determinante vale $2A$. La respuesta correcta es (e).

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución al Control N°3 – segundo turno – forma G

Viernes 3 de Mayo, 2002

Para las preguntas 1 a 4, considere los puntos $O = (0,0,0,0), P = (-1,1,1,1), Q = (0,0,2,2), R = (1,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Anotaremos $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}\,, \overrightarrow{q} = \overrightarrow{OQ}\,, \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OR}$

Pregunta 1. La proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{r}$ es el vector:

(a)	$(0,0,1,1)$	(b)	$\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$	(c)	$(1,1,1,1)$
(d)	$\frac{1}{2}(1,1,1,1)$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: La proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{r}$ es $\overrightarrow{p_r} = (\overrightarrow{p} \cdot \widehat{r})\widehat{r}$. Como $\left\|\overrightarrow{r}\right\| = \sqrt{4} = 2, \widehat{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r}$ y por lo tanto $\overrightarrow{p_r} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r})\overrightarrow{r} = \frac{1}{4}(2)\overrightarrow{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$.
Así, la respuesta correcta es (d).

Pregunta 2. La altura trazada desde el vértice R del triángulo OPR es

(a)	2	(b)	$\sqrt{2}$	(c)	$\sqrt{3}$
(d)	1	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El doble del área del triángulo OPR puede ser calculado de dos maneras:

(a) como $\left\|\overrightarrow{p}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_p}\right\|$; y (b) como $\left\|\overrightarrow{r}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_r}\right\|$.

La altura pedida es $\left\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_p}\right\|$, que por lo anterior es

$$\left\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_p}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{r}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{p}\right\|} = \frac{2\left\|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_r}\right\|}{2} = \left\|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_r}\right\| = \left\|(-1,1,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1)\right\|,$$

y la altura pedida es

$$\left\|\frac{1}{2}(-3,1,1,1)\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3}.$$

Así, la respuesta correcta es (c).

Pregunta 3. El ángulo α entre $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{q}$ es:

(a)	$\alpha = \pi/3$	(b)	$\alpha = \pi/4$	(c)	$\alpha = \pi/6$
(d)	$\alpha = 2\pi/3$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{q}$ es Arccos $\left(\frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{q}}{\left\|\overrightarrow{r}\right\| \left\|\overrightarrow{q}\right\|}\right)$, o sea,

$$\text{Arccos}\left(\frac{4}{\sqrt{4}\sqrt{8}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Así, la respuesta correcta es (b).

Pregunta 4. Sea π el plano en $\mathbb{R}^4$ generado por $\overrightarrow{q}$ y $\overrightarrow{r}$ Entonces un vector que junto a $\overrightarrow{q}$ completa una base ortogonal de π es:

(a)	(1,1,-1,1)	(b)	(1,1,1,-1)	(c)	(1,-1,-1,-1)
(d)	(1,-1,1,1)	(e)	Ninguno de las anteriores		

Solución: El vector buscado es un múltiplo de $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_q}$ (donde R_q es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{r}$ sobre $\overrightarrow{q}$). Calculamos $\overrightarrow{r_q}$: $\overrightarrow{r_q} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{q})\overrightarrow{q} = \frac{1}{8}(4)\overrightarrow{q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{q} = (0,0,1,1)$, por lo que $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_q} = (1,1,1,1) - (0,0,1,1) = (1,1,0,0)$, y así la respuesta correcta es (e).

Pregunta 5. Si el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ es A, entonces el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2c & 3c-b & a+b \\ 2f & 3f-e & d+e \\ 2i & 3i-h & g+h \end{vmatrix}$ es:

(a)	A	(b)	$-6A$	(c)	$3A$
(d)	$6A$	(e)	Ninguna de las anteriores		

Solución: El determinante vale $2A$. La respuesta correcta es (e).

MAT 1102 $\star$ Geometría

Solución al Control N°3 – segundo turno – forma H

Viernes 3 de Mayo, 2002

Pregunta 1. Si el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ es A, entonces el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2c & 3c-b & a+b \\ 2f & 3f-e & d+e \\ 2i & 3i-h & g+h \end{vmatrix}$ es:

(a)	A	(b)	$-6A$	(c)	$3A$
(d)	$6A$	(e)	Ninguna de las anteriores		

Solución: El determinante vale $2A$. La respuesta correcta es (e).

Para las preguntas 2 a 5, considere los puntos $O=(0,0,0,0), P=(-1,1,1,1), Q=(0,0,2,2), R=(1,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Anotaremos $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{q}=\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{OR}$

Pregunta 2. La proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{r}$ es el vector:

(a)	$(0,0,1,1)$	(b)	$\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$	(c)	$(1,1,1,1)$
(d)	$\frac{1}{2}(1,1,1,1)$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: La proyección ortogonal de $\overrightarrow{p}$ sobre $\overrightarrow{r}$ es $\overrightarrow{p_r}=(\overrightarrow{p}\cdot\widehat{r})\widehat{r}$. Como $\left\|\overrightarrow{r}\right\|=\sqrt{4}=2$, $\widehat{r}=\frac{1}{2}\overrightarrow{r}$ y por lo tanto $\overrightarrow{p_r}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r})\overrightarrow{r}=\frac{1}{4}(2)\overrightarrow{r}=\frac{1}{2}\overrightarrow{r}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)$.
Así, la respuesta correcta es (d).

Pregunta 3. La altura trazada desde el vértice R del triángulo OPR es

(a)	3	(b)	$\sqrt{2}$	(c)	$\sqrt{3}$
(d)	1	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El doble del área del triángulo OPR puede ser calculado de dos maneras:

(a) como $\left\|\overrightarrow{p}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_p}\right\|$; y (b) como $\left\|\overrightarrow{r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_r}\right\|$.

La altura pedida es $\left\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_p}\right\|$, que por lo anterior es

$$\left\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_p}\right\|=\frac{\left\|\overrightarrow{r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{p}\right\|}=\frac{2\left\|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_r}\right\|}{2}=\left\|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_r}\right\|=\left\|(-1,1,1,1)-\frac{1}{2}(1,1,1,1)\right\|,$$

y la altura pedida es

$$\left\|\frac{1}{2}(-3,1,1,1)\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{12}=\sqrt{3}.$$

Así, la respuesta correcta es (c).

Pregunta 4. El ángulo α entre $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{q}$ es:

(a)	$\alpha=\pi/3$	(b)	$\alpha=\pi/4$	(c)	$\alpha=\pi/6$
(d)	$\alpha=2\pi/3$	(e)	Ninguna de las anteriores.		

Solución: El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{q}$ es Arccos $\left(\dfrac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{q}}{\left\|\overrightarrow{r}\right\|\left\|\overrightarrow{q}\right\|}\right)$, o sea,

$$\text{Arccos}\left(\frac{4}{\sqrt{4}\sqrt{8}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Así, la respuesta correcta es (b).

Pregunta 5. Sea π el plano en $\mathbb{R}^4$ generado por $\overrightarrow{q}$ y $\overrightarrow{r}$ Entonces un vector que junto a $\overrightarrow{q}$ completa una base ortogonal de π es:

(a)	(1,1,-1,1)	(b)	(1,1,1,-1)	(c)	(1,-1,-1,-1)
(d)	(1,-1,1,1)	(e)	Ninguno de las anteriores		

Solución: El vector buscado es un múltiplo de $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_q}$ (donde R_q es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{r}$ sobre $\overrightarrow{q}$). Calculamos $\overrightarrow{r_q}$: $\overrightarrow{r_q} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{q})\overrightarrow{q} = \frac{1}{8}(4)\overrightarrow{q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{q} = (0,0,1,1)$, por lo que $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_q} = (1,1,1,1) - (0,0,1,1) = (1,1,0,0)$, y así la respuesta correcta es (e).