Examen Geometría

MAT 1102

1. a) **Encuentre todas las soluciones $x \in \mathbb{R}$ de la ecuación $\cos(\pi \cos(2x)) = 0$.**

Solución Parte (a)

$$\cos(\pi \cos(2x)) = 0 \Longleftrightarrow \pi \cos(2x) = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$$

La función coseno está acotada , $-1 \leq \cos x \leq 1$. Luego, de lo anterior se deduce que los valores de k deben de satisfacer

$$-1 \leq (2k+1)\frac{1}{2} \leq 1 \Longleftrightarrow -2 \leq (2k+1) \leq 2 \Longleftrightarrow -3 \leq 2k \leq 1$$

Por lo tanto, los únicos valores de $k \in \mathbb{Z}$ que cumplen con la condición son

$$\boxed{k = 0, k = -1}$$

Calculando para ambos casos se obtiene que :

Para $k = 0$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm \operatorname{arc}\cos(\frac{1}{2}) + 2l\pi \,,\, l \in \mathbb{Z} \\ x &= \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi \,,\, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Para $k = -1$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \frac{-1}{2} \Longrightarrow x = \pm \operatorname{arc}\cos(\frac{-1}{2}) + 2l\pi \,,\, l \in \mathbb{Z} \\ x &= \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi \,,\, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

b) **Considere las rectas en $\mathbb{R}^3$ dadas por las ecuaciones**

$$L_1 : \frac{x+1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{8} \; ; \; L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{3-2y}{2} = \frac{1-z}{-4}$$

Halle la ecuación del plano que las contiene.

Solución Parte (b)

Los vectores directores de cada recta son iguales a $\vec{d} = (2-1, 4)$, luego ellas son paralelas.

Para calcular el plano que las contiene basta con tomar un P en una recta y un punto Q en la otra recta y hacer el producto cruz de $\vec{v} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ con $\vec{d}$.

Sea $P = (-1, 0, 2)$ el punto en L_1 y $Q = (3, 3/2, 1)$ en L_2. Entonces el vector normal $\vec{n}$ del plano contiene a ambas rectas es:

$$\vec{n} = (2, -1, 4) \times (4, 3/2, -1) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3/2 & -1 \end{pmatrix} = -5i + 18j + 7k$$

Es decir, $\vec{n} = (-5, 18, 7)$. Por lo tanto el plano tiene equación

$$\{(x, y, z) : ((x, y, z) - (-1, 0, 2)) \cdot (-5, 18, 7) = 0\}$$

Por lo tanto la ecuación es

$$\{(x, y, z) : -5(x+1) + 18(y-0) + 7(z-2) = 0\} = \{(x, y, z) : -5x + 18y + 7z = 19\}$$

2. Considere los vectores $P, Q, R \in \mathbb{R}^4$ dados por :

$$P = (1,1,1,-2),\; Q = (-1,1,0,-2),\; R = (3,-1,1,2)$$

a) Demuestre que $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ son coplanares.

Solución Parte (a)

Para demostrar que son coplanares hay que encontrar un plano Π en $\mathbb{R}^4$ que contenga a los tres vectores.

Como dos cualesquiera de ellos son l.i. basta con probar que el tercero es combinación lineal de los otros dos. Así el plano generado por dos de ellos es el plano que contiene a los tres vectores.

Para el caso, si tomamos $\vec{p} = (1,1,1,-2), \vec{q} = (-1,1,0,-2), \vec{r} = (3,-1,1,2)$ se obtiene que

$$\vec{r} = \vec{p} - 2\vec{q} \;\text{ o equivalentemente }\quad \vec{q} = \frac{1}{2}\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{r} \text{ .. etc}$$

b) Calcule el área del cuadrilátero $OPQR$.

Solución Parte (b)

La manera más simple consiste en calcular las áreas de cada uno de los triángulos que se forman con el cuadrilátero. Para hacer esto se proyecta ortogonalmente sobre una diagonal. Ver figura.

Utilizando este diagrama, donde la diagonal es $\vec{p}$, se tiene que q', r' son las proyecciones ortogonales de q, r sobre p respectivamente. Se sabe que :

$$q' = \frac{q \cdot p}{|p|^2}\, p = \frac{4}{7}\, p \;, \quad r' = \frac{r \cdot p}{|p|^2}\, p = \frac{-1}{7}\, p$$

Luego, las áreas de los triángulos son

$$A = \frac{1}{2}|q' - q|\,|p| \Longrightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{7}}\sqrt{546} = \frac{\sqrt{78}}{2}$$

$$B = \frac{1}{2}|r' - r|\,|p| \Longrightarrow B = \frac{1}{2\sqrt{7}}\sqrt{728} = \frac{\sqrt{104}}{2} = \sqrt{26}$$

Por lo tanto el área pedida es:

$$\frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\sqrt{546} + \sqrt{728}\right)$$

3. Considere el paralelógramo $ABCD$ y E un punto en en lado BC tal que $\overline{BE} : \overline{EC} = 1 : \alpha$. Determine α de modo que el área del cuadrilátero $ABED$ sea el doble del área del triángulo ECD.

Solución Elegir origen en D: Por la condición dada por la razón $1 : \alpha$ se tiene que:

$$\vec{e} = \frac{\alpha\vec{b} + \vec{c}}{1+\alpha}$$

Luego la altura h_1 del $\triangle DEC$ es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ sobre DC. Calculando,

$$h_1 = \vec{e} - \frac{\vec{e}\cdot\vec{c}}{|c|^2}\,\vec{c}. \qquad \text{Luego el área del } \triangle DEC = \frac{1}{2}\,|\vec{c}|\,|h_1|$$

Ahora,

$$\vec{e}\cdot\vec{c} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\,(\vec{b}\cdot\vec{c}) + \frac{1}{1+\alpha}\,|\vec{c}|^2 \implies \frac{1}{|\vec{c}|^2}\;\vec{e}\cdot\vec{c} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2} + \frac{1}{1+\alpha}$$

De aquí se tiene que

$$\vec{e} - \frac{\vec{e}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\;\vec{c} = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\right)\;\vec{c} + \frac{1}{1+\alpha}\;\vec{c} \implies \vec{e} - \frac{\vec{e}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\;\vec{c} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\;\left(\vec{b} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|c|^2}\,\vec{c}\right)$$

Por lo tanto se obtiene que

$$|\triangle DEC| = \frac{1}{2}\,\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\,|\vec{c}|\,\left|\vec{b} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|c|^2}\,\vec{c}\right|$$

Por lo tanto,

$$|\triangle DEC| = \frac{1}{2}\,\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\,|\vec{c}|\,|h_2|$$

Además $|\#ABED| = |\#ABCD| - |\triangle DEC|$. Como se pide que $|\#ABED| = 2|\triangle DEC|$ se obtiene que esto es equivalente a

$$|\#ABCD| = 3|\triangle DEC|$$

Pero, $|\#ABCD\,| = |\vec{c}|\,|h_2| = 3|\triangle DEC\,|$. De lo cual se obtiene que

$$\frac{3}{2}\,\frac{\alpha}{1+\alpha} = 1 \implies \alpha = 2$$

4. Dos vértices de un triángulo equilátero en el plano complejo son $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 1 - i$. Determine el tercer vértice del triángulo.

Solución

Llamemos por $z_3 = a + ib$ el tercer vértice. Por ser el triángulo equilátero se debe tener que : $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_2|$.

Calculando $|z_1 - z_2|$,

$$|z_1 - z_2|^2 = |(2 + 3i) - (1 - i)|^2 = |1 + 4i|^2 = 17$$

Por lo tanto se tienen las ecuaciones $|z_1 - z_3|^2 = 17$ y $|z_2 - z_3|^2 = 17$.

Estas ecuaciones corresponden al sistema cuadrático,

$$\begin{aligned} (a-2)^2 + (b-3)^2 &= 17 \\ (a-1)^2 + (b+1)^2 &= 17 \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones se obtien la relación lineal entre a y b, dada por

$$2a + 8b = 11$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones y despejando se obtiene que las soluciones son

$$\begin{aligned} a &= \frac{9}{2} \pm 2\sqrt{3} \\ b &= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

5. Considere la cuadrática $\mathcal{E}$ dada por :

$$\mathcal{E} \ : \ 3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}\,y + \frac{3}{4} = 0$$

a) Identifique el tipo de cónica
b) Encuentre la ecuación de la cuadrática $\mathcal{E}$ sin término mixto.
c) Determine un foco y un vértice de la cónica generada por $\mathcal{E}$.
d) Grafique la cónica $\mathcal{E}$.

Solución (a)

Aplicar ekl criterio de el índice (o discriminante) se tiene que

$$B^2 - 4AC = 12 - 12 = 0$$

Luego puede ser un parábola o una parábola degenerada.

Solución (b)

Para eliminar el término mixto xy es necesario hacer una rotación. El ángulo de dicha rotación está dado por

$$\tan 2\theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Luego es inmediato que $2\,\theta = \dfrac{\pi}{3}$ y por lo tanto el ángulo de rotación es $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

El cambio de variable a realizar es :

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,x' - y'\right) \\ y & = & \dfrac{1}{2}\left(x' + \sqrt{3}\,y'\right) \end{array}$$

Reemplazando en la ecuación $\mathcal{E}$ se obtiene la ecuación equivalente

$$\mathcal{E}' \ : \ y' = 2\left(x' - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$$

Solución (c)

Claramente se trata de una parábola cuyo vértice y foco son :

$$\text{vértice en } \ x'y' : \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,,\,0\right) \longrightarrow \text{vértice en } \ xy : \left(\frac{3}{8}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$\text{foco en } x'y' : \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{8}\,,\,0\right) \longrightarrow \text{foco en } \ xy : \left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{16}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{16}\right)$$

Solución (d)

La gráfica aproximada es la siguiente:

6. Encuentre la ecuación de la superficie cónica $\mathcal{G}$ en $\mathbb{R}^3$ cuyo vértice es el punto $V = (1, 1, 1)$ y cuya base es la circunferencia C en el plano XY de ecuación $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Solución

Consideremos un punto $(s, t, 0)$ en el plano XY que pertenezca a la circunferencia $\mathcal{C}$. Es decir,

$$(s-3)^2 + (t+1)^2 = 4$$

Construyamos la recta que pasa por $(s, t, 0)$ y el vértice $V = (1, 1, 1)$. La ecuación de tal recta es

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \alpha\,(s-1, t-1, -1)$$

Comparando coordenadas se obtiene que:

$$x = 1 + \alpha\,(s-1) \Longrightarrow x = (1-\alpha) + \alpha s$$

$$y = 1 + \alpha\,(t-1) \Longrightarrow y = (1-\alpha) + \alpha t$$

$$z = 1 - \alpha \Longrightarrow z = 1 - \alpha$$

De estas ecuaciones se obtiene que :

$$\begin{aligned} x &= z + \alpha s \\ y &= z + \alpha t \end{aligned}$$

Despejando s, t en estas ecuaciones y agregando la condición de que los parámetros s, t satisfacen la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ se obtiene:

$$\left(\frac{x-z}{\alpha} - 3\right)^2 + \left(\frac{y-z}{\alpha} + 1\right)^2 = 4$$

Por lo tanto la ecuación de la superficie cónica $\mathcal{G}$ es :

$$(x + 2z - 3)^2 + (y - 2z + 1)^2 = 4(1-z)^2$$