Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2002

MAT 1102 ⋆ Geometría

Pauta preguntas de desarrollo – Interrogación N°2

Forma A

7. Considere los puntos de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$A = (4, -9, -5, -5)\,,\ B = (-3, 5, 23, 16)\,,\ C = (11, -8, 3, 19)\,,\ D = (14, -9, 3, 25).$$

a) Demuestre que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ concurren (se encuentran) en un punto P. Encuentre las coordenadas de este punto.

b) Encuentre las razones en que P divide a los trazos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Solución:

a) Los vectores directores de las dos rectas son $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = (-3, 5, 23, 16) - (4, -9, -5, -5) = (-7, 14, 28, 21)$ y $\overrightarrow{d} - \overrightarrow{c} = (14, -9, 3, 25) - (11, -8, 3, 19) = (3, -1, 0, 6)$ respectivamente. Así, sus ecuaciones pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{a} + s(-7, 14, 28, 21) = (4, -9, -5, -5) + s(-7, 14, 28, 21), \\ \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{c} + t(-7, 14, 28, 21) = (11, -8, 3, 19) + t(3, -1, 0, 6). \end{aligned}$$

Las dos rectas concurrirán en P si y sólo si $\overrightarrow{p}$ es solución de ambas ecuaciones, o sea, si y sólo si existen $s, t \in \mathbb{R}$ tales que

$$(4, -9, -5, -5) + s(-7, 14, 28, 21) = (11, -8, 3, 19) + t(3, -1, 0, 6).$$

Pero esto es equivalente a que el sistema

$$\left.\begin{array}{rrcrr} 4 & -7s & = & 11 & +3t \\ -9 & +14s & = & -8 & -t \\ -5 & +28s & = & 3 & \\ -5 & +21s & = & 19 & +6t \\ \hline \end{array}\right|$$

tenga solución.
Como el sistema tiene solución $s = 2/7$, $t = -3$, la rectas concurren en el punto

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p} &= \overrightarrow{a} + s(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \\ &= (4, -9, -5, -5) + \frac{2}{7}(-7, 14, 28, 21) \\ &= (4, -9, -5, -5) + (-2, 4, 8, 6) \\ &= (2, -5, 3, 1) \\ &= (11, -8, 3, 19) - (9, -3, 0, 18) \\ &= (11, -8, 3, 19) - 3(3, -1, 0, 6) \\ &= \overrightarrow{c} + t(\overrightarrow{d} - \overrightarrow{c}). \end{aligned}$$

b) Como $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \frac{2}{7}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \frac{5}{7}\overrightarrow{a} + \frac{2}{7}\overrightarrow{b}$, tenemos que P divide al trazo $\overline{AB}$ en razón

$$\lambda = \frac{2/7}{1 - 2/7} = 2/5$$

(o, en otras palabras, en razón $2:5$).
Como $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{c} - 3(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = 4\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$, tenemos que P divide al trazo $\overline{CD}$ en razón

$$\mu = \frac{-3}{1 - (-3)} = -3/4$$

(o, en otras palabras, en razón $-3:4$).

Puntaje: Ponemos nota de 1 a 7.

En la parte (a), por llegar a plantear correctamente el sistema de ecuaciones, 2 puntos. Por resolver correctamente el sistema y llegar a las coordenadas de P, otros 2 puntos.

En la parte (b), cada una de las razones de división es 1 punto.

Total: (a) = 4 pts., (b) = 2 pts. Más punto base, da nota entre 1 y 7.

8. Un hiperparalelepípedo en $\mathbb{R}^4$ es el cuerpo generado por los vectores v_1, v_2, v_3, v_4.

   a) Considere v_1, v_2, v_3, v_4 vectores de $\mathbb{R}^4$ y sean u_1, u_2, u_3, u_4 los vectores resultantes luego de aplicarles el proceso de Gram-Schmidt. Pruebe que el volumen del hiperparalelepípedo generado por los vectores v_i es igual al generado por los u_i.

   b) Calcule el volumen del paralelepípedo en $\mathbb{R}^4$ cuyos vértices son

$$O = (0,0,0,0),\ P = (-1,1,1,1),\ Q = (0,0,2,2),\ R = (1,1,1,1)$$

Solución:

a) El volumen[1] del hiperparalelepípedo determinado por el origen y los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 está dado por el determinante

$$\det(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Si los vectores u_i son los resultantes de aplicar Gram-Schmidt a los v_i, entonces existen escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ y μ tales que:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 + \alpha v_1, \\ u_3 &= v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, \\ u_4 &= v_4 + \delta v_1 + \lambda v_2 + \mu v_3. \end{aligned}$$

Así, el volumen generado por los u_i está dado por el determinante

$$\det(u_1, u_2, u_3, u_4) = \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + \delta v_1 + \lambda v_2 + \mu v_3).$$

Pero este último determinante puede ser transformado en $\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$ por sucesivos pasos de agregar a un vector una combinación lineal de los otros, por lo que los dos determinantes tienen el mismo valor.

Por ejemplo, los siguientes pasos nos permiten cambiar, en el determinante dado, el vector $v_4 + \delta v_1 + \lambda v_2 + \mu v_3$ por v_4:

$$\begin{aligned}
& \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + \delta v_1 + \lambda v_2 + \mu v_3) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + \delta v_1 + \lambda v_2 + \mu v_3 - \mu(v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2)) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + \delta v_1 + \lambda v_2 + \ \mu \cancel{v}_3 - \ \mu \cancel{v}_3 - \mu\beta v_1 - \mu\gamma v_2)) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + \delta v_1 + \lambda v_2 + \ \mu \cancel{v}_3 - \ \mu \cancel{v}_3 - \mu\beta v_1 - \mu\gamma v_2) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + \delta v_1 + \lambda v_2 - \mu\beta v_1 - \mu\gamma v_2) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + (\delta - \mu\beta) v_1 + (\lambda - \mu\gamma) v_2) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + (\delta - \mu\beta) v_1 + (\lambda - \mu\gamma) v_2 - (\lambda - \mu\gamma)(v_2 + \alpha v_1)) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + (\delta - \mu\beta - \alpha\lambda + \alpha\mu\gamma) v_1) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + (\delta - \mu\beta - \alpha\lambda + \alpha\mu\gamma) v_1) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4 + (\delta - \mu\beta - \alpha\lambda + \alpha\mu\gamma) v_1 - (\delta - \mu\beta - \alpha\lambda + \alpha\mu\gamma) v_1) \\
= \ & \det(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1 + \gamma v_2, v_4)
\end{aligned}$$

Nota: estos detalles no son necesarios en la solución, basta la explicación de más arriba, mostrando la idea de cómo funciona la transformación.

[1] En realidad, deberíamos hablar del *hipervolumen*.

b) Para calcular el volumen del paralelepípedo hay varias estrategias posibles. Mostramos algunas.

Primera estrategia: trabajar en el espacio de tres dimensiones generado por los tres vectores dados.

Si ortogonalizamos el conjunto de tres vectores dados se obtiene un paralalelepípedo recto cuyo volumen es el mismo del original (ésta es una versión de (a) en tres dimensiones). Como este paralalelepípedo es recto, su volumen se calcula simplemente como producto de las normas de los vectores involucrados, posiblemente con un cambio de signo debido a la orientación.

Tras aplicar Gram-Schmidt, se obtienen los vectores

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (-1, 1, 1, 1), \\ u_2 &= (1, -1, 1, 1), \\ u_3 &= (1, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

Así, el volumen buscado es

$$\|(-1, 1, 1, 1)\| \cdot \|(1, -1, 1, 1)\| \cdot \|(1, 1, 0, 0)\| = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Segunda estrategia: usar la parte (a) de este mismo problema: se agrega un cuarto vector, se calcula el hipervolumen resultante, y se divide por la "altura" del hiperparalelepípedo resultante.

Si a los 3 vértices dados —fuera del origen— les agregamos un cuarto vértice S, entonces el hiper-volumen del hiper-paralalelepípedo determinado por estos cuatro vectores vale $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS})$.

Pero —por la parte (a)— si ortogonalizamos este conjunto de cuatro vectores se obtiene un hiper-paralalelepípedo recto cuyo hiper-volumen es el mismo del original. Como este hiper-paralalelepípedo es recto, su hiper-volumen se calcula simplemente como producto de las normas de los vectores involucrados, posiblemente con un cambio de signo debido a la orientación.

Ahora bien: si $\overrightarrow{OS}^{\perp}$ es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{OS}$ sobre el subespacio generado por $\left\{ \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR} \right\}$, entonces el cuarto vector ortogonalizado —tras Gram-Schmidt— debe ser $\overrightarrow{SS}^{\perp}$, por lo que el volumen determinado por $\left\{ \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR} \right\}$ está dado por

$$\left| \frac{\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS})}{\left\| \overrightarrow{SS}^{\perp} \right\|} \right|.$$

Vemos que para que esto tenga sentido, $\left\| \overrightarrow{SS}^{\perp} \right\|$ debe ser $\neq 0$, por lo que es necesario que el vector $\overrightarrow{OS}$ sea linealmente independiente de los anteriores, i.e.,

$$\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}) \neq 0.$$

Así, para calcular el volumen pedido, debemos:

1) escoger un punto $S \in \mathbb{R}^4$, de modo que $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}) \neq 0$;
2) calcular $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS})$;
3) encontrar el punto $S^\perp$ que es la proyección ortogonal del punto S sobre el espacio generado por $\left\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right\}$;
4) calcular $\left\| \overrightarrow{SS^\perp} \right\|$.
5) dividir $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS})$ por $\left\| \overrightarrow{SS^\perp} \right\|$.

Una posible elección de S es $(0,0,0,1)$. Con este punto S, se tiene

$$\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4,$$

$$S^\perp = (0,0,1/2,1/2)$$

(esto puede ser calculado de varias formas distintas) y

$$\left\| \overrightarrow{SS^\perp} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Con estos datos, el volumen buscado es

$$\frac{|-4|}{1/\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Tercera estrategia: definir un análogo del producto cruz en $\mathbb{R}^4$.

En estricto rigor, este método debiera ser probado en detalle, pero premiaremos la inventiva con puntaje máximo, aunque no haya una justificación rigurosa (suponiendo, claro está, que el método está bien aplicado y el resultado es el correcto).

Hallar el volumen de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^4$ es el análogo 4-dimensional de hallar el área de un paralelógramo en $\mathbb{R}^3$. Así como el área de un paralelógramo la da $\left\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right\|$, en $\mathbb{R}^4$ el volumen de un paralelepípedo debería estar dado por $\left\|\times(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\right\|$ con alguna definición razonable de $\times(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donde $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Por analogía con $\mathbb{R}^3$, la siguiente "parecería" una definición razonable:

$$\times(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} & \widehat{\mathbf{l}} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

donde $\widehat{\mathbf{i}} = (1,0,0,0)$, $\widehat{\mathbf{j}} = (0,1,0,0)$, $\widehat{\mathbf{k}} = (0,0,1,0)$, $\widehat{\mathbf{l}} = (0,0,0,1)$.

Por supuesto, esto es lo que habría que probar (es menos terrible de lo que parece). En nuestro caso,

$$
\begin{aligned}
\times(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q},\overrightarrow{r}) &= \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} & \widehat{\mathbf{l}} \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{k}} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{l}} \\
&= 4\widehat{\mathbf{k}} - 4\widehat{\mathbf{l}} = (0,0,4,-4).
\end{aligned}
$$

Así, el volumen buscado es

$$\left\| \times(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q},\overrightarrow{r}) \right\| = \|(0,0,4,-4)\| = 4\sqrt{2}.$$

Puntaje: En esta pregunta, cada una de las partes recibe como máximo 3 puntos, más el punto base.

Forma de calcular el puntaje total de la prueba:

Como $P1 + P2 + P3 + P4 + P5 + P6 = P7 + P8$, lo más simple es: escribir dos veces la nota determinada por las preguntas 1 a 6 (= cantidad de respuestas correctas en esa parte +1 por el punto base), escribir la nota de la pregunta 7, la nota de la pregunta 8, sumar las cuatro notas y dividir por 4.

Ejemplo: si un estudiante tiene un 5 en las preguntas de alternativa (o sea, 4 respuestas correctas de las 6), un 3 en la pregunta 7 y un 4 en la pregunta 8, su puntaje se calcula como:

$$5 + 5 + 3 + 4 = 17,$$

y su nota es $17 \div 4 = 4{,}25$, o sea un 4.3.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2002

MAT 1102 ⋆ Geometría

Pauta preguntas de desarrollo – Interrogación N°2

Forma B

7. Considere los puntos de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$A = (4, -9, -5, -5)\,,\ B = (-3, 5, 23, 16)\,,\ C = (11, -8, 3, 19)\,,\ D = (14, -9, 3, 25).$$

a) Demuestre que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ concurren (se encuentran) en un punto P. Encuentre las coordenadas de este punto.

b) Encuentre las razones en que P divide a los trazos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Solución:

Igual a la de la fila A.

8. Un hiperparalelepípedo en $\mathbb{R}^4$ es el cuerpo generado por los vectores v_1, v_2, v_3, v_4.

a) Considere v_1, v_2, v_3, v_4 vectores de $\mathbb{R}^4$ y sean u_1, u_2, u_3, u_4 los vectores resultantes luego de aplicarles el proceso de Gram-Schmidt. Pruebe que el volumen del hiperparalelepípedo generado por los vectores v_i es igual al generado por los u_i.

b) Calcule el volumen del paralelepípedo en $\mathbb{R}^4$ cuyos vértices son

$$O = (0, 0, 0, 0),\ P = (-1, 1, 1, 1),\ Q = (0, 0, 2, 2),\ R = (1, 1, 1, 1)$$

Solución:

Igual a la de la fila A.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE DE 2002

MAT 1102 ⋆ Geometría

Pauta preguntas de desarrollo – Interrogación N°2

Forma C

7. Considere los puntos de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$A = (2, 1, -2, 5)\,,\ B = (6, -7, 6, -7)\,,\ C = (11, -1, 8, -10)\,,\ D = (13, -1, 10, -13)$$

   a) Demuestre que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ concurren (se encuentran) en un punto P. Encuentre las coordenadas de este punto.

   b) Encuentre las razones en que P divide a los trazos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Solución:

a) Los vectores directores de las dos rectas son $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = (6, -7, 6, -7) - (2, 1, -2, 5) = (4, -8, 8, -12)$ y $\overrightarrow{d} - \overrightarrow{c} = (13, -1, 10, -13) - (11, -1, 8, -10) = (2, 0, 2, -3)$ respectivamente.

Así, sus ecuaciones pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{a} + s(4, -8, 8, -12) = (2, 1, -2, 5) + s(4, -8, 8, -12), \\ \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{c} + t(2, 0, 2, -3) = (11, -1, 8, -10) + t(2, 0, 2, -3). \end{aligned}$$

Las dos rectas concurrirán en P si y sólo si $\overrightarrow{p}$ es solución de ambas ecuaciones, o sea, si y sólo si existen $s, t \in \mathbb{R}$ tales que

$$(2, 1, -2, 5) + s(4, -8, 8, -12) = (11, -1, 8, -10) + t(2, 0, 2, -3).$$

Pero esto es equivalente a que el sistema

$$\left.\begin{array}{rrcrr} 2 & +4s & = & 11 & +2t \\ 1 & -8s & = & -1 & \\ -2 & +8s & = & 8 & +2t \\ 5 & -12s & = & -10 & -3t \\ \hline \end{array}\right|$$

tenga solución.

Como el sistema tiene solución $s = 1/4$, $t = -4$, la rectas concurren en el punto

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p} &= \overrightarrow{a} + s(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \\
&= (2, 1, -2, 5) + \frac{1}{4}(4, -8, 8, -12) \\
&= (2, 1, -2, 5) + (1, -2, 2, -3) \\
&= (3, -1, 0, 2) \\
&= (11, -1, 8, -10) - (8, 0, 8, -12) \\
&= (11, -1, 8, -10) - 4(2, 0, 2, -3) \\
&= \overrightarrow{c} + t(\overrightarrow{d} - \overrightarrow{c}).
\end{aligned}$$

b) Como $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{b}$, tenemos que P divide al trazo $\overline{AB}$ en razón

$$\lambda = \frac{1/4}{1 - 1/4} = 1/3$$

(o, en otras palabras, en razón $1 : 3$).
Como $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{c} - 4(\overrightarrow{d} - \overrightarrow{c}) = 5\overrightarrow{c} - 4\overrightarrow{d}$, tenemos que P divide al trazo $\overline{CD}$ en razón

$$\mu = \frac{-4}{1 - (-4)} = -4/5$$

(o, en otras palabras, en razón $-4 : 5$).

Puntaje: Ponemos nota de 1 a 7.

En la parte (a), por llegar a plantear correctamente el sistema de ecuaciones, 2 puntos. Por resolver correctamente el sistema y llegar a las coordenadas de P, otros 2 puntos.

En la parte (b), cada una de las razones de división es 1 punto.

Total: (a) = 4 pts., (b) = 2 pts. Más punto base, da nota entre 1 y 7.

8. Un hiperparalelepípedo en $\mathbb{R}^4$ es el cuerpo generado por los vectores v_1, v_2, v_3, v_4.

   a) Considere v_1, v_2, v_3, v_4 vectores de $\mathbb{R}^4$ y sean u_1, u_2, u_3, u_4 los vectores resultantes luego de aplicarles el proceso de Gram-Schmidt. Pruebe que el volumen del hiperparalelepípedo generado por los vectores v_i es igual al generado por los u_i.

   b) Calcule el volumen del paralelepípedo en $\mathbb{R}^4$ cuyos vértices son

$$O = (0, 0, 0, 0),\ P = (-1, 1, 1, 1),\ Q = (0, 0, 2, 2),\ R = (1, 1, 1, 1)$$

Solución:

Igual a la de la fila A.