

MAT 1108 * I-3

1. Sean $A(1, 2)$ y $B(5, 4)$ dos vértices de un rombo $ABCD$, si la diagonal AC está dada por $y = x + 1$, determine los restantes vértices.

Solución

- $AB = \sqrt{20}$
 $C \in \overline{AC} \implies C(x_0, x_0 + 1)$
 $\overline{BC} = \sqrt{20} \implies (x_0 - 5)^2 + (x_0 - 3)^2 = 20$
 $\implies 2x_0^2 - 16x_0 + 14 = 0$
 $\implies (x_0 - 7)(x_0 - 1) = 0 \implies \begin{cases} x_0 = 1 & \longrightarrow A \\ x_0 = 7 & \longrightarrow C \end{cases}$
 $\implies C(7, 8)$
- Para D , como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ entonces D se ubica en la intersección de las dos rectas,

$$\begin{cases} \overline{DC} : y = \frac{x}{2} + \frac{9}{2} \\ \overline{AD} : y = 2x \end{cases} \implies \frac{x}{2} + \frac{9}{2} = 2x \implies x = 3 \implies y = 6$$

luego $D(3, 6)$.

2. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(1,0)$, $B(4,1)$ y $C(1,2)$. Demuestre además que el pie de la altura trazada desde A a \overline{BC} , está en la circunferencia.

Solución

- Los puntos medios están dados por: $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$, $(1, 1)$
- La ecuación de la circunferencia que pasa por los 3 puntos anteriores, está dada por:

$$C : 3x^2 + 3y^2 - 11x - 6y + 11 = 0$$

- Sea D el pie de la altura desde A a \overline{BC} , como $m_{BC} = \frac{-1}{3}$ entonces:

$$\overline{AD} : y = 3x - 3$$

y la intersección de esta recta con \overline{BC} es el punto $D(\frac{8}{5}, \frac{9}{5})$.

- Basta ver que $D \in C$

$$3 \cdot (\frac{8}{5})^2 + 3 \cdot (\frac{9}{5})^2 - 11 \cdot \frac{8}{5} - 6 \cdot \frac{9}{5} + 11 = 0 \implies D \in C$$

3. Dados: los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y la recta $L : ax + by + c = 0$. Si Q es el punto de intersección de L y $\overline{P_1 P_2}$, calcule la razón:

$$k = \frac{P_1 Q}{Q P_2}$$

Solución

- Sea Q el punto que divide $\overline{P_1 P_2}$ en razón k , entonces.

$$x_q = \frac{x_1 + k x_2}{1 + k}, \quad y_q = \frac{y_1 + k y_2}{1 + k}$$

- Como $ax_q + by_q + c = 0$, se tiene:

$$\frac{ax_1 + by_1}{1 + k} + \frac{k}{1 + k} (ax_2 + by_2 + c) = 0$$

- Multiplicando por $(1 + k)$, se tiene:

$$(ax_1 + by_1 + c) + k(ax_2 + by_2 + c) = 0$$

$$\implies k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$$

4. Determine en cada uno de los casos siguientes, la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.
- Pasa por el origen, es tangente en ese punto a la recta $2x + 3y = 0$ y además pasa por el punto $(-1, 0)$.
 - Pasa por el punto $(2, 3)$ y es tangente a los dos ejes coordenados.
 - Es tangente a la recta $2x + y - 5 = 0$ y a los ejes coordenados. ¿Cuántas hay en este caso?

Solución

- a) ■ El centro $C(a, b)$, se ubica en la recta perpendicular a la recta $2x + y - 5 = 0$ que pasa por el origen, luego

$$\overline{OC} : y = \frac{3}{2}x, \text{ así } C(x_0, \frac{3}{2}x_0)$$

- Como $d(C, (-1, 0)) = d(c, (0, 0))$, entonces:

$$(x_0 + 1)^2 + (\frac{3}{2}x_0)^2 = x_0^2 + (\frac{3}{2}x_0)^2 \implies 2x_0 + 1 = 0 \implies x_0 = \frac{-1}{2}$$

- Por lo tanto $C(\frac{-1}{2}, -3)$ y $r^2 = \frac{13}{4}$. Luego la circunferencia buscada está dada por:

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 3)^2 = \frac{13}{4}$$

- b) ■
 ■
 ■
- c)