

MAT 1108 \* I-3

1. Sean  $A(1, 2)$  y  $B(5, 4)$  dos vértices de un rombo  $ABCD$ , si la diagonal  $AC$  está dada por  $y = x + 1$ , determine los restantes vértices.

**Solución**

- $AB = \sqrt{20}$   
 $C \in \overline{AC} \implies C(x_0, x_0 + 1)$   
 $\overline{BC} = \sqrt{20} \implies (x_0 - 5)^2 + (x_0 - 3)^2 = 20$   
 $\implies 2x_0^2 - 16x_0 + 14 = 0$   
 $\implies (x_0 - 7)(x_0 - 1) = 0 \implies \begin{cases} x_0 = 1 & \longrightarrow A \\ x_0 = 7 & \longrightarrow C \end{cases}$   
 $\implies C(7, 8)$
- Para  $D$ , como  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$  y  $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$  entonces  $D$  se ubica en la intersección de las dos rectas,

$$\begin{cases} \overline{DC} : y = \frac{x}{2} + \frac{9}{2} \\ \overline{AD} : y = 2x \end{cases} \implies \frac{x}{2} + \frac{9}{2} = 2x \implies x = 3 \implies y = 6$$

luego  $D(3, 6)$ .

2. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo de vértices  $A(1,0)$ ,  $B(4,1)$  y  $C(1,2)$ . Demuestre además que el pie de la altura trazada desde  $A$  a  $\overline{BC}$ , está en la circunferencia.

**Solución**

- Los puntos medios están dados por:  $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ ,  $(1, 1)$
- La ecuación de la circunferencia que pasa por los 3 puntos anteriores, está dada por:

$$C : 3x^2 + 3y^2 - 11x - 6y + 11 = 0$$

- Sea  $D$  el pie de la altura desde  $A$  a  $\overline{BC}$ , como  $m_{BC} = \frac{-1}{3}$  entonces:

$$\overline{AD} : y = 3x - 3$$

y la intersección de esta recta con  $\overline{BC}$  es el punto  $D(\frac{8}{5}, \frac{9}{5})$ .

- Basta ver que  $D \in C$

$$3 \cdot (\frac{8}{5})^2 + 3 \cdot (\frac{9}{5})^2 - 11 \cdot \frac{8}{5} - 6 \cdot \frac{9}{5} + 11 = 0 \implies D \in C$$

3. Dados: los puntos  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  y la recta  $L : ax + by + c = 0$ . Si  $Q$  es el punto de intersección de  $L$  y  $\overline{P_1 P_2}$ , calcule la razón:

$$k = \frac{P_1 Q}{Q P_2}$$

### Solución

- Sea  $Q$  el punto que divide  $\overline{P_1 P_2}$  en razón  $k$ , entonces.

$$x_q = \frac{x_1 + k x_2}{1 + k} \quad , \quad y_q = \frac{y_1 + k y_2}{1 + k}$$

- Como  $ax_q + by_q + c = 0$ , se tiene:

$$\frac{ax_1 + by_1}{1 + k} + \frac{k}{1 + k} (ax_2 + by_2 + c) = 0$$

- Multiplicando por  $(1 + k)$ , se tiene:

$$(ax_1 + by_1 + c) + k(ax_2 + by_2 + c) = 0$$

$$\implies k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$$

4. Determine en cada uno de los casos siguientes, la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.
- Pasa por el origen, es tangente en ese punto a la recta  $2x + 3y = 0$  y además pasa por el punto  $(-1, 0)$ .
  - Pasa por el punto  $(2, 3)$  y es tangente a los dos ejes coordenados.
  - Es tangente a la recta  $2x + y - 5 = 0$  y a los ejes coordenados. ¿Cuántas hay en este caso?

**Solución**

- a) ■ El centro  $C(a, b)$ , se ubica en la recta perpendicular a la recta  $2x + y - 5 = 0$  que pasa por el origen, luego

$$\overline{OC} : y = \frac{3}{2}x, \text{ así } C(x_0, \frac{3}{2}x_0)$$

- Como  $d(C, (-1, 0)) = d(c, (0, 0))$ , entonces:

$$(x_0 + 1)^2 + (\frac{3}{2}x_0)^2 = x_0^2 + (\frac{3}{2}x_0)^2 \implies 2x_0 + 1 = 0 \implies x_0 = \frac{-1}{2}$$

- Por lo tanto  $C(\frac{-1}{2}, -3)$  y  $r^2 = \frac{13}{4}$ . Luego la circunferencia buscada está dada por:

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 3)^2 = \frac{13}{4}$$

- b) ■  
 ■  
 ■
- c)