Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2002

**MAT 1102 ⋆ Geometría**

# Solución y pauta de corrrección Interrogación N°1

## Observaciones generales sobre la distribución de puntaje

1. Cada pregunta fue evaluada en una escala de 0 a 12 puntos. La nota final fue calculada sumando los puntajes parciales, dividiendo por 10 y agregando el punto base.
2. Las notas en cada una de las preguntas fueron, en general, 0, 6 o 12. La manera de asignar dichos puntajes en cada una fue:

   **12 puntos:** En general, el problema está perfecto o casi perfecto.

   **6 puntos:** Hay una idea *constructiva*, que debería llevar a la solución deseada, pero no se llega.

   **0 puntos:** Nada, o ideas sueltas que no llevan a ninguna parte.
3. En cada pregunta el corrector puede descontar hasta un 25% (3 puntos) por errores menores.

## Observaciones específicas sobre preguntas particulares

1. Originalmente, cada parte de la pregunta 2 valía 3 puntos (pensado en asignarle nota de 1 a 7 a esa pregunta). En el esquema de puntaje de 0 a 12, cada parte fue evaluada de 0 a 6.
2. Algunas de las preguntas contienen indicaciones sobre puntaje, adicionales a las dadas en el párrafo anterior.

# Soluciones a los problemas de la prueba

1. Demuestre que en todo paralelógramo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

   **Solución:**

   Sea $ABCD$ el paralelógramo, y sean $d_1, d_2$ las diagonales. Por el teorema del coseno, tenemos:

   (a) En el $\triangle ABD$: $d_1^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha \quad (1)$.
   
   (b) En el $\triangle ABC$ : $d_2^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta \quad (2)$.

   Sumando (1) y (2),

   $$d_1^2 + d_2^2 = 2c^2 + b^2 + d^2 - 2bc\cos\alpha - 2cd\cos\beta$$

   como ABCD es un paralelógramo, $b = d$.

   Luego:

   $$d_1^2 + d_2^2 = 2c^2 + 2d^2 - 2cd(\cos\alpha + \cos\beta)$$

   Como $\alpha + \beta = \pi$, tenemos: $\cos\alpha + \cos\beta = \cos\alpha + \cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha - \cos\alpha = 0$.

   Así, $d_1^2 + d_2^2 = 2c^2 + 2d^2$, que es lo que se quería demostrar.

2. (a) [3 pts.] Demuestre que, para todo $\theta$ tal que $\cos\theta \neq -1$,

   $$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}.$$

   **Primera solución:**

   $$\begin{aligned}
   \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} &= \frac{\operatorname{sen}(2\cdot\theta/2)}{1+\cos(2\cdot\theta/2)} \\
   &= \frac{2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1} \\
   &= \frac{2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} \\
   &= \frac{\operatorname{sen}\theta/2}{\cos\theta/2} = \tan(\theta/2).
   \end{aligned}$$

   **Nota:** es necesario argumentar que, gracias a que $\cos\theta \neq -1$, se tiene $\cos\theta/2 \neq 0$. Por ejemplo, se puede decir que:

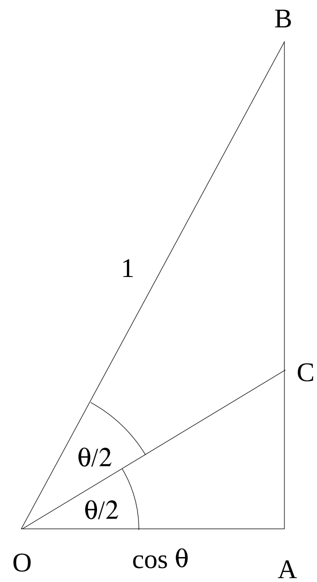
   "Si se tuviera $\cos\theta/2 = 0$ debe tenerse

   $$\theta/2 = (2k+1)\pi/2,$$

   de donde $\theta = (2k+1)\pi$ y por lo tanto $\cos\theta = -1$."

   Si falta esta justificación u otra a tal efecto, se descuentan 2 puntos de los 6 que vale esta parte.

**Segunda solución:**
En la siguiente figura, $|AB| = \operatorname{sen}\theta$ y $|AC| = \cos\theta\tan(\theta/2)$, de donde
$$|BC| = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta\tan(\theta/2).$$




Como $\overline{OC}$ es bisectriz del $\angle AOB$, tenemos
$$\frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\tan(\theta/2)}{1} = \frac{\cos\theta\tan(\theta/2)}{\cos\theta} = \tan(\theta/2).$$
Así, $\tan(\theta/2) = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta\tan(\theta/2)$, de donde
$$\tan(\theta/2) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}.$$

**Nota:** la demostración anterior es válida sólo para valores de $\theta$ en $(0, \pi/2)$, por lo que es necesario justificar (usando periocidad, paridad y/o simetrías) que esta propiedad se extiende a todos los otros números reales. Además de lo anterior, es necesario considerar aparte los casos de múltiplos enteros de $\pi/2$. Esta justificación vale 2 puntos.

**Solución errónea:**
La siguiente demostración es incorrecta, y le corresponde un máximo de 3 puntos de los 6 que vale esta parte:
$$\begin{aligned}
\tan(\theta/2) &= \frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta}}{1+\cos\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}.
\end{aligned}$$

La razón por la que esta demostración es incorrecta es que, por ejemplo, $\operatorname{sen}(\theta/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$, por lo que al reemplazar $\tan(\theta/2)$ por un cuociente de dos raíces es necesario analizar qué signo corresponde utilizar.

Hay cuatro posibilidades, correspondientes a las cuatro posibles combinaciones de signos de $\operatorname{sen}(\theta/2)$ y $\cos(\theta/2)$; la demostración presentada más arriba sólo considera el caso en que $\operatorname{sen}(\theta/2) > 0$ y $\cos(\theta/2) > 0$.

*Nota:* los mismos comentarios sobre esta demostración se aplican a cualquier otra demostración que use las identidades

$$\operatorname{sen}(\theta/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \quad \cos(\theta/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

y no tome en cuenta los signos.

(b) [3 pts.] Demuestre que, si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, entonces

$$\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma = 4 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma.$$

**Solución:**

La siguiente es una forma correcta de enfrentar el problema.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma &= 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \operatorname{sen} 2\gamma \\
&= 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(2\pi - (\alpha+\beta)) \\
&= 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(-2(\alpha+\beta)) \\
&= 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \operatorname{sen}(2(\alpha+\beta)) \\
&= 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \\
&= 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\
&= 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\,[-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)] \\
&= 4\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
&= 4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\
&= 4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\pi - (\alpha+\beta)) \\
&= 4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma.
\end{aligned}$$

3. Resuelva la ecuación
$$\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,2x - \cos 2x = 1.$$

**Solución:**

dividiendo la ecuación por 2, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{2}\cos 2x &= \frac{1}{2} &\iff\\
\mathrm{sen}(\pi/3)\,\mathrm{sen}\,2x - \cos(\pi/3)\cos 2x &= \frac{1}{2} &\iff\\
-(\cos(\pi/3)\cos 2x - \mathrm{sen}(\pi/3)\,\mathrm{sen}\,2x) &= \frac{1}{2} &\iff\\
-\cos(2x+\pi/3) &= \frac{1}{2} &\iff\\
\cos(2x+\pi/3) &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Así,
$$2x + \pi/3 = 2k\pi \pm \mathrm{Arccos}(-1/2) = 2k\pi \pm 2\pi/3,$$

de donde
$$2x = \left(2k - \tfrac{1}{3}\right)\pi \pm \frac{2\pi}{3},$$

o sea,
$$x = \left(k - \tfrac{1}{6}\right)\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Otra forma de escribir esta solución es:

$$x = k\pi + \pi/6 \quad \text{o bien} \quad x = k\pi - \pi/2.$$

**Puntaje:** Por llegar a plantear la ecuación $\cos(2x+\pi/3) = -\frac{1}{2}$ se dan 4 puntos de 12. El resto del puntaje se da por resolver correctamente esta ecuación.

4. Resuelva la ecuación
$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos} 2x = \frac{\pi}{3}.$$

**Solución:**

Aplicando la función coseno, se obtiene:

$$\cos(\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos} 2x) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}.$$

Luego,
$$2x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = \frac{1}{2}.$$

Resolviendo esta ecuación (por ejemplo, reescribéndola como

$$2x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}$$

y elevando al cuadrado), se obtiene

$$x^2 = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}.$$

Analizando estas dos soluciones, vemos que:

- $x = 1/2$ es solución: $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} + \operatorname{Arccos} 1 = \pi/3 + 0 = \pi/3$;
- $x = -1/2$ no es solución: $\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{2}) + \operatorname{Arccos}(-1) = 2\pi/3 + \pi = 5\pi/3 \neq \pi/3$.

Así, la única solución a la ecuación planteada es $x = 1/2$.

**Puntaje:** Por llegar a la ecuación $x^2 = 1/4$ (o, equivalentemente, $x = \pm 1/2$), 6 puntos de los 12. Los otros 6 puntos los da el análisis de las soluciones.

5. Encuentre todos los valores de $x \in [0, 2\pi]$ y todos los valores de $a \in [\pi/2, 3\pi/2]$ tales que
$$\operatorname{sen}(x-a) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+a).$$

**Solución:**

Primero determinaremos los posibles valores para $x$.

Ya que $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x-a) = 0$, se tiene $2\cos(x-a/2)\operatorname{sen}(a/2) = 0$, de donde $\operatorname{sen}(a/2) = 0$ o $\cos(x - a/2) = 0$.

Pero si $\operatorname{sen}(a/2) = 0$ entonces $a/2 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, de donde $a = 2k\pi$ lo cual es imposible ya que $a \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

Así, podemos deducir que
$$\cos(x - a/2) = 0. \tag{1}$$

Del mismo modo, considerando que $\operatorname{sen}(x+a) - \operatorname{sen} x = 0$, se llega a
$$\cos(x + a/2) = 0. \tag{2}$$

De (1) y (2), se deduce que
$$\cos(x + a/2) - \cos(x - a/2) = 0,$$
o sea, $-2\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(a/2) = 0$, de donde $\operatorname{sen} x = 0$ o $\operatorname{sen}(a/2) = 0$. Ya sabemos que la segunda alternativa es imposible, por lo que $\operatorname{sen} x = 0$, o sea, $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Como $x \in [0, 2\pi]$, $x$ debe ser $0$, $\pi$ o $2\pi$.

A continuación, determinaremos los posibles valores de $a$.

Si $x = 0$, debe tenerse
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-a) = \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} a&, \\ \operatorname{sen}(\pi - a) = \operatorname{sen}\pi = \operatorname{sen}(\pi + a)&, \quad \text{o bien} \\ \operatorname{sen}(2\pi - a) = \operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen}(2\pi + a)&. \end{aligned}$$

En todos los casos debe tenerse $\operatorname{sen} a = 0$, de donde $a = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Como $a \in [\pi/2, 3\pi/2]$ debe tenerse $a = \pi$.

Así, las soluciones son:

- $x = 0, a = \pi$;
- $x = \pi, a = \pi$;
- $x = 2\pi, a = \pi$.

Que estas efectivamente son soluciones se ve porque:
$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{sen}(0) = &\quad \operatorname{sen}(0+\pi) &= \operatorname{sen}(0+2\pi), \\ 0 = \operatorname{sen}(\pi) = &\quad \operatorname{sen}(\pi+\pi) &= \operatorname{sen}(\pi+2\pi), \\ 0 = \operatorname{sen}(2\pi) = &\quad \operatorname{sen}(2\pi+\pi) &= \operatorname{sen}(2\pi+2\pi). \end{aligned}$$

**Puntaje:** En esta pregunta, el puntaje se distribuye como sigue:

- si se halla $x$ o $a$ (pero no ambos), 4 puntos de los 12;
- si se hallan $x$ y $a$, 10 puntos de los 12; y finalmente,
- 2 puntos por justificar que los pares hallados son efectivamente soluciones.