Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución a la Interrogación N°2

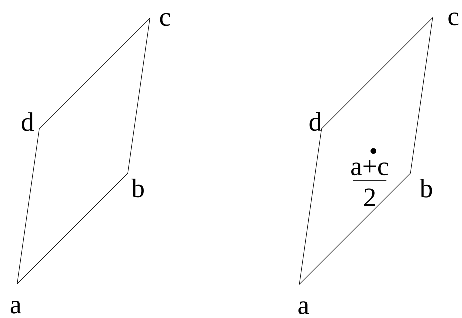
1. (a) Dados dos vértices opuestos A y C (representados, respectivamente, por los complejos a y c) del rombo $ABCD$, y sabiendo que el ángulo BAD mide α, demuestre que los vértices B y D están representados por los complejos b y d dados por las fórmulas

$$b, d = \frac{a+c}{2} \mp \frac{\tan(\alpha/2)\,(c-a)i}{2}.$$

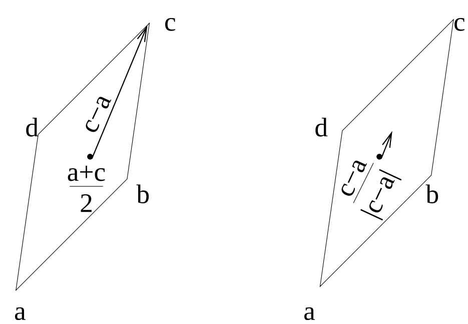
   (b) Use la parte (a) para encontrar los vértices faltantes del rombo $ABCD$, donde $a = 1+2i$, $c = 7+14i$ y $\tan\alpha = 3/4$.

Solución:

(a) El punto medio de la diagonal dada es $\dfrac{a+c}{2}$.

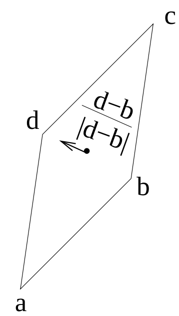


Un vector en la dirección de dicha diagonal es $c-a$, por lo que un vector unitario en dicha dirección es $\dfrac{c-a}{|c-a|}$.

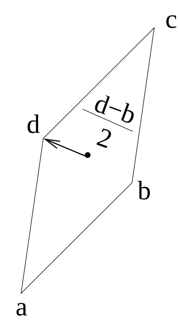


Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)

Ya que el ángulo formado por las diagonales del rombo es $\pi/2$, para obtener un vector unitario en la dirección de la diagonal BD debemos tomar el vector anterior y multiplicarlo por $\operatorname{cis}\pi/2 = i$.



Así, $\dfrac{d-b}{|d-b|} = \dfrac{(c-a)i}{|c-a|}$, y por lo tanto $\dfrac{d-b}{2} = \dfrac{(c-a)i\,|d-b|}{2\,|c-a|}$.



Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 2 pts.)

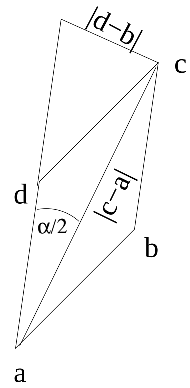
Como $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b+d}{2}$ (ya que el punto medio de la primera diagonal es también punto medio de la otra), tenemos

$$d = \frac{b+d}{2} + \frac{d-b}{2} = \frac{a+c}{2} + \frac{d-b}{2} = \frac{a+c}{2} + \frac{(c-a)i\,|d-b|}{2\,|c-a|}$$

(y una fórmula análoga sirve para b, cambiando el signo $+$ por $-$).

Así, lo único que nos falta demostrar es que $\dfrac{|d-b|}{|c-a|} = \tan(\alpha/2)$.

Pero esto sale de la figura siguiente, ya que en el triángulo rectángulo que resulta de prolongar el lado AD al doble y copiar la diagonal BD sobre el punto D, los catetos miden $|d-b|$ y $|c-a|$ respectivamente.



$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$$

(b) La única dificultad en este caso es determinar el valor de $\tan(\alpha/2)$. Como $0 < \alpha < \pi$, $\alpha/2$ está entre 0 y $\pi/2$, por lo que $\tan(\alpha/2)$ es positiva.
De la fórmula para $\tan 2x$ deducimos que, si $u = \tan(\alpha/2)$, entonces $\frac{2u}{1-u^2} = 3/4$, de donde $3u^2 + 8u - 3 = 0$, por lo que $u = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \dfrac{-8 \pm 10}{6}$, de donde $u = \dfrac{-8+10}{6} = 1/3$ o $u = \dfrac{-8-10}{6} = -3$. Como sabemos que $u > 0$, debe tenerse $\tan(\alpha/2) = 1/3$.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)}}$$

Así, aplicando la fórmula, tenemos

$$\begin{aligned}
b &= \frac{a+c}{2} - \frac{\tan(\alpha/2)\,(c-a)i}{2} \\
&= (4+8i) - \frac{(1/3)(6+12i)i}{2} \\
&= (4+8i) - i(1+2i) \\
&= (4+8i) + (2-i) \\
&= 6+7i, \\
d &= (4+8i) + \frac{(1/3)(6+12i)i}{2} \\
&= (4+8i) + i(1+2i) \\
&= (4+8i) - (2-i) \\
&= 2+9i,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 3 pts.)}}$$

2. (a) Demuestre que

$$\left[\,(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\,(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\,(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})\,\right]=2\left[\,\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\,\right].$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \left[\,(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\,(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\,(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})\,\right] \\
= \;& ((\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}))\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}) \\
= \;& (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}) \\
= \;& (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}) \\
= \;& [\,\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\,]+[\,\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{c}\,]+[\,\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{c}\,]+[\,\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{a}\,]+[\,\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\,]+[\,\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\,] \\
= \;& [\,\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\,]+[\,\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\,] \\
= \;& 2\,[\,\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\,].
\end{aligned}$$

(b) Demuestre, usando sólo vectores, que si $ABCD$ es un cuadrado y P es un punto en el mismo plano que $ABCD$, entonces

$$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2.$$

Solución:
Escribamos

$$\begin{aligned}
& \overline{PA}^2+\overline{PC}^2-\overline{PB}^2-\overline{PD}^2 \\
= \;& (\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})+(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}) \\
& -(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b})-(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{d}) \\
= \;& ||\overrightarrow{p}||^2-2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{a}+||\overrightarrow{a}||^2+||\overrightarrow{p}||^2-2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{c}+||\overrightarrow{c}||^2 \\
& -||\overrightarrow{p}||^2+2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b}-||\overrightarrow{b}||^2-||\overrightarrow{p}||^2+2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{d}-||\overrightarrow{d}||^2 \\
= \;& ||\overrightarrow{a}||^2+||\overrightarrow{c}||^2-||\overrightarrow{b}||^2-||\overrightarrow{d}||^2+2\overrightarrow{p}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}) \\
= \;& ||\overrightarrow{a}||^2-||\overrightarrow{b}||^2+||\overrightarrow{c}||^2-||\overrightarrow{d}||^2+2\overrightarrow{p}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})
\end{aligned}$$

Pero, por ser $ABCD$ cuadrado, sus lados opuestos son paralelos, o sea, $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}$, por lo que $(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})=\overrightarrow{0}$.
Así,

$$\begin{aligned}
\overline{PA}^2+\overline{PC}^2-\overline{PB}^2-\overline{PD}^2 &= ||\overrightarrow{a}||^2-||\overrightarrow{b}||^2+||\overrightarrow{c}||^2-||\overrightarrow{d}||^2 \\
&= (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})
\end{aligned}$$

Usando de nuevo el hecho de que $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{PA}^2+\overline{PC}^2-\overline{PB}^2-\overline{PD}^2 &= (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}) \\
&= (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}) \\
&= (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}) \\
&= (\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})
\end{aligned}$$

Pero, por ser $ABCD$ cuadrado, sus lados adyacentes son perpendiculares, o sea, $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 0$ y $(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{d}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 0$. Así,

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 - \overline{PD}^2 = 0,$$

que es equivalente a lo pedido.

3. La recta ℓ es la intersección de dos planos, $\ell = \pi_1 \cap \pi_2$, dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_1) \cdot \widehat{n}_1 = 0, \\ \pi_2 &: \quad (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_2) \cdot \widehat{n}_2 = 0. \end{aligned}$$

Determine la ecuación del plano π que contiene a ℓ y es perpendicular al plano π_0 de ecuación

$$\pi_0 \quad : \quad (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) \cdot \widehat{n}_0 = 0.$$

Discuta el número de soluciones del problema, considerando las distintas posiciones relativas de ℓ y π_0 ($\ell \parallel \pi_0$, $\ell \perp \pi_0$, ninguna de las anteriores).

Solución:

Sea P_3 un punto cualquiera de ℓ. Como $P_3 \in \pi_1 \cap \pi_2$, las ecuaciones de π_1 y π_2 pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_3) \cdot \widehat{n}_1 = 0, \\ \pi_2 &: \quad (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_3) \cdot \widehat{n}_2 = 0. \end{aligned}$$

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)

Si el plano π contiene a ℓ entonces es un plano del haz que forman π_1 y π_2, de donde su ecuación puede escribirse

$$\pi \quad : \quad (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_3) \cdot \widehat{n}_1 + \lambda(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_3) \cdot \widehat{n}_2 = 0,$$

o, lo que es equivalente,

$$\pi \quad : \quad (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_3) \cdot (\widehat{n}_1 + \lambda \widehat{n}_2) = 0.$$

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 2 pts.)

Así, un vector $\overrightarrow{n}$ normal al plano π es $\overrightarrow{n} = \widehat{n}_1 + \lambda \widehat{n}_2$. Para que $\pi \perp \pi_o$, debe tenerse $\overrightarrow{n} \perp \widehat{n}_o$, o sea, $(\widehat{n}_1 + \lambda \widehat{n}_2) \cdot \widehat{n}_o = 0$, de donde $\widehat{n}_1 \cdot \widehat{n}_o + \lambda \widehat{n}_2 \cdot \widehat{n}_o = 0$. Si $\widehat{n}_2 \cdot \widehat{n}_o \neq 0$ (o sea, si $\pi_2 \not\perp \pi_o$) entonces $\lambda = -\dfrac{\widehat{n}_1 \cdot \widehat{n}_o}{\widehat{n}_2 \cdot \widehat{n}_o}$ es la única solución.

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 3 pts.)

Si $\widehat{n}_2 \cdot \widehat{n}_o = 0$ (o sea, si $\pi_2 \perp \pi_o$) entonces $\lambda = \infty$ es siempre solución (recuerde que tomar el valor $\lambda = \infty$ en $\pi_1 + \lambda \pi_2$ corresponde a tomar el plano π_2). Sin embargo, si $\widehat{n}_1 \cdot \widehat{n}_o = 0$

entonces $\lambda = \infty$ no es la única solución, ya que en este caso cualquier valor de λ sirve para hacer $\widehat{n}_1 \cdot \widehat{n}_o + \lambda \widehat{n}_2 \cdot \widehat{n}_o = 0$.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 4 pts.)}}$$

Así, si tanto π_1 como π_2 son perpendiculares a π_o entonces hay infinitas soluciones, y en caso contrario hay una única solución ($\pi = \pi_2$ si $\pi_2 \perp \pi_o$, o el correspondiente a $\lambda = -\dfrac{\widehat{n}_1 \cdot \widehat{n}_o}{\widehat{n}_2 \cdot \widehat{n}_o}$ si no).

En términos de las posibles posiciones relativas de ℓ y π_o, vemos que si $\ell \perp \pi_o$ (que corresponde al caso en que tanto π_1 como π_2 son perpendiculares a π_o) hay infinitas soluciones (cualquier plano del haz), y en cualquier otro caso (si $\ell \parallel \pi_o$ o si ℓ no es ni perpendicular ni paralela a π_o) hay exactamente una solución.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$$

4. Los puntos A y B son tales que el origen no está en la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Si $d > 0$ es un real cualquiera, determine el vector posición $\overrightarrow{p}$ de un punto P tal que el plano determinado por A, B y P está a distancia d del origen, y P es la proyección ortogonal del origen sobre dicho plano.

   Ayuda: ya que $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son l.i., los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ forman una base del espacio, por lo que es posible escribir $\overrightarrow{p}$ como

$$\overrightarrow{p} = \alpha\,\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).$$

   Determine los valores de α, β y γ.

   Solución:

   Buscamos un punto P tal que:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{p}\| &= d, \\ \overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) &= 0, \\ \overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) &= 0. \end{aligned}$$

   La primera ecuación puede traducirse como $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} = d^2$, y las otras dos como $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}$ respectivamente.

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 1 pts.)

   Así, el sistema anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} &= d^2, \\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a} &= d^2, \\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{b} &= d^2. \end{aligned}$$

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 2 pts.)

   Así, usando la ayuda dada, y escribiendo $\overrightarrow{p} = \alpha\,\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$, tenemos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a} &= \alpha\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 + \beta(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}), \\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{b} &= \alpha(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \beta\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2. \end{aligned}$$

Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 3 pts.)

   Este sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} \alpha\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 + \beta(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) &= d^2, \\ \alpha(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \beta\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 &= d^2, \end{aligned}$$

que puede ser resuelto para α y β sin problemas.

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 1 pts. (hasta aquí: 4 pts.)}}$$

Para encontrar el valor de γ, una vez conocidos los valores de α y β, calculamos $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}$ de dos formas distintas: por una parte, sabemos que $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} = d^2$, y por otra

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} &= (\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})) \cdot (\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})) \\
&= \alpha^2(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}) + \beta^2(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}) + 2\alpha\beta(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \gamma^2((\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})) \\
&= \alpha^2 \left|\left|\overrightarrow{a}\right|\right|^2 + \beta^2 \left|\left|\overrightarrow{b}\right|\right|^2 + 2\alpha\beta(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \gamma^2 \left|\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|\right|^2,
\end{aligned}$$

de donde

$$\gamma^2 = \frac{d^2 - \alpha^2 \left|\left|\overrightarrow{a}\right|\right|^2 - \beta^2 \left|\left|\overrightarrow{b}\right|\right|^2 - 2\alpha\beta(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})}{\left|\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|\right|^2}.$$

$$\boxed{\text{Puntaje por esta parte: 2 pts. (hasta aquí: 6 pts.)}}$$