MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución y Pauta de corrección, Interrogación N°3 – forma A

INSTRUCCIONES:

- Esta prueba consta de tres partes: una de selección múltiple, una de completación de resultados y una de desarrollo. Responda las dos primeras partes en la hoja de respuestas que viene con el cuadernillo, y la parte de desarrollo en las otras hojas de éste.
- La primera parte tiene cuatro preguntas, la segunda dos, y la tercera dos.
- En las partes de selección múltiple y completación de resultados, **sólo se corregirá la respuesta** (no se mirará el desarrollo), y **no se descontará puntaje por respuestas incorrectas**.

PUNTUACIÓN.
La manera de calcular la nota de esta prueba es la siguiente:

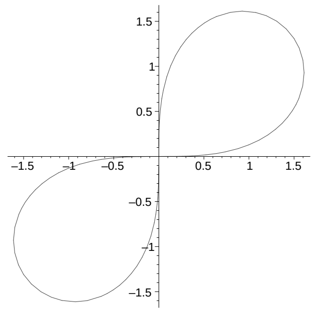
- La primera parte tiene una nota de 1 a 7 (= 2 puntos por cada respuesta correcta, +1 punto base).
- La segunda parte tiene una nota de 1 a 7 (= 3 puntos por cada respuesta correcta, +1 punto base).
- Cada pregunta de la parte de desarrollo tiene una nota de 1 a 7.
- La nota de esta prueba es el promedio de las cuatro notas mencionadas.

Tiempo: 120 minutos
Sin consultas
No se permite usar calculadora

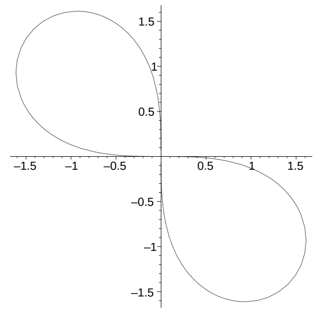
Primera parte: selección múltiple — forma A

1. El gráfico de la curva de ecuación $\quad \rho^2 = -4 \operatorname{sen} 2\theta \quad$ es:

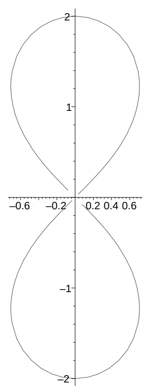
   (a)



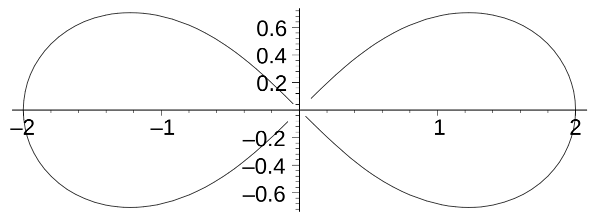
   (b)



   (c)



   (d)



   (e) Ninguna de las anteriores.

   Solución:

   La ecuación dada corresponde a la curva (b).

2. PREGUNTA ELIMINADA

3. La ecuación del plano π que contiene al punto $(1, 2, 1)$ y es perpendicular a la recta de ecuaciones $x + z = 0, \quad y = 1$ es:

   (a) $x + z - 2 = 0$ (b) $x + y - 3 = 0$ (c) $y - z = 1$

   (d) $x - z = 0$ (e) Ninguna de las anteriores.

   Solución:

   El vector director de la recta es el producto cruz de los vectores normales a los planos de ecuaciones $x + z = 0, \quad y = 1$. En este caso, el vector director de la recta es $(1, 0, 1) \times (0, 1, 0) = (-1, 0, 1)$. Si el plano es perpendicular a esta recta, debe ser perpendicular al vector $(-1, 0, 1)$. Así, el plano tiene ecuación de la forma $x - z = k$, y k puede ser determinado ya que el punto $(1, 2, 1)$ debe ser solución de esta ecuación. Finalmente, la respuesta correcta es (d).

4. La ecuación $\quad |z|^2 - 2\mathfrak{Re}((i-2)z) + 4 = 0 \quad$ corresponde a:

   a) La circunferencia de centro en $(-2,1)$ y radio 1
   b) La circunferencia de centro en $(-2,-1)$ y radio 1
   c) La circunferencia de centro en $(2,1)$ y radio 1
   d) La circunferencia de centro en $(2,-1)$ y radio 1
   e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

En general, la ecuación $|z|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + k = 0 \quad$ (donde $a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}$) puede ser escrita como

$$|z|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + |a|^2 = |a|^2 - k;$$

equivalentemente,

$$(z-a)(\overline{z-a}) = |a|^2 - k.$$

Esto puede ser expresado como

$$|z-a|^2 = |a|^2 - k,$$

o lo que es lo mismo,

$$|z-a| = \sqrt{|a|^2 - k},$$

por lo que esta ecuación representa una circunferencia de centro en a y radio $\sqrt{|a|^2 - k}$.
En nuestro caso, $\overline{a} = i - 2$, de donde $a = -2 - i$ y $k = 4$, por lo que el centro es $-2 - i$ y su radio es $|a|^2 - k = |-2-i|^2 - 4 = 5 - 4 = 1$, por lo que la respuesta correcta es (b).

Segunda parte: completación de resultados — forma A

5. Si la circunferencia $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ pasa por los puntos $P_1(1,-1)$, $P_2(-1,1)$ y $P_3(1,3)$, entonces la ecuación de la circunferencia que pasa por P_1, P_2 y por el centro de $\mathcal{C}$ es:

Solución:

El centro de la circunferencia dada es $(1,1)$ (esto puede ser calculado de diversas maneras). Así, el centro de la circunferencia buscada es $(0,0)$ (de nuevo, esto puede ser calculado de distintas formas), y su radio es $\sqrt{2}$, por lo que su ecuación puede ser escrita como

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Nota: Esta ecuación también puede ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Dada la recta $\ell : 2x + y - 8 = 0$ en $\mathbb{R}^2$, el punto Q simétrico de $P(1,1)$ con respecto a ℓ es:

Solución:

Para encontrar el punto simétrico de $P(1,1)$ con respecto a ℓ, buscaremos en primer lugar la recta ℓ' paralela a ℓ que pasa por $P(1,1)$; esta recta es $2x + y - 3 = 0$.

La recta simétrica a ℓ' respecto de ℓ es la recta $\ell'' : 2x + y - 13 = 0$.

El punto buscado es la intersección entre la recta ℓ'' y la recta $\ell^{\perp}$, perpendicular a ℓ y que pasa por $P(1,1)$.

Como $\ell^{\perp}$ tiene por ecuación $x - 2y + 1 = 0$, el punto buscado es $Q(5,3)$.

Tercera parte: preguntas de desarrollo — forma A

7. *a*) Determine la ecuación del plano que pasa por $(2,1,1)$ y por $(0,1,2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x - y - 2 = 0$.

Solución:

El plano buscado tiene como vectores directores a $(2,1,1) - (0,1,2) = (2,0,-1)$ y a $(1,-1,0)$ (el vector normal al plano $x - y - 2 = 0$). Así, un vector normal al plano buscado es $(1,-1,0) \times (2,0,-1) = (1,1,2)$, por lo que la ecuación buscada es de la forma $x + y + 2z = k$ con k constante. Reemplazando cualquiera de los puntos dados se encuentra que $k = 5$.

Así, finalmente, la ecuación buscada puede escribirse como:

- $x + y + 2z = 5$ (o $x + y + 2z - 5 = 0$);
- $(\overrightarrow{p} - (2,1,1)) \cdot (1,1,2) = 0$; (pudiendo reemplazar $(2,1,1)$ por $(0,1,2)$, etc.).

Puntaje: Si el método usado está condenado al fracaso, puntaje total 0 pts.

Si el método usado está bueno, pero se cometen errores conceptuales (o si se cometen muchos errores chicos de cálculo) el puntaje máximo es 1 punto (de los 3 que vale esta pregunta).

Si se cometen pocos (uno o dos) errores de cálculo, puntaje máximo 2 puntos.

Además, se bajará hasta un punto por escribir fórmulas o comentarios que no vengan al caso (¡aunque sean ciertas!).

b) Encuentre **todos** los números $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$z^2 - (2i + 1)z + (3 - i) = 0.$$

Justifique su respuesta.

Solución:

Formas de resolverlo:

- aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado;
- escribir $z = x + yi$ y tratar de resolver el sistema de ecuaciones resultante.

En cualquier caso, deberían llegar a que las raíces de la ecuación son

$$z_1 = i, \quad z_2 = 1 + 3i.$$

Justificación: La justificación puede ser hecha invocando:

1) el teorema demostrado en clases que dice que un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces complejas (contando multiplicidades);
2) una de las formas del Teorema Fundamental del Álgebra (que dice que todo polinomio de grado n tiene *exactamente* n raíces; o
3) cualquier otro argumento equivalente.

Puntaje: El puntaje de la pregunta va de 0 a 3. Por encontrar las soluciones (por algún método razonable como los presentados u otro similar), 2 puntos. Por justificar, hasta 1 punto.

Si hay errores menores (de cálculo, etc.), se descuenta 0.5 a 1 pto. (a criterio del corrector).

Si hay errores mayores (conceptuales) se descuenta 1 o 1.5 ptos., a criterio del corrector.

8. *a*) Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, y sea P_0 un punto fijo en $\mathbb{R}^3$.

Sea π el plano dado por la ecuación

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} \qquad (\text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Así, a cada punto $P \in \pi$ le corresponde un único par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Se sabe que, dado un punto fijo Q en $\mathbb{R}^3$ y un real $d > 0$, el conjunto de puntos $P \in \pi$ cuya distancia a Q es d es una circunferencia (posiblemente degenerada).

Exprese, en términos de $\overrightarrow{q}$ y d, el centro y el radio de dicha circunferencia.

Solución:

Dado un punto de la circunferencia buscada, su distancia a Q es d. Dicho punto forma —con Q y la proyección ortogonal de Q sobre π— un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa mide d y un cateto es la distancia entre Q y π.

Así, el centro de la circunferencia buscada es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre el plano π, y su radio es

$$r = \sqrt{d^2 - (d(Q, \pi))^2},$$

donde $d(Q, \pi)$ es la distancia entre el punto Q y el plano π.

Con esto basta: esto tendría los 3 puntos de la pregunta.

Si alguien da la fórmula de proyección ortogonal, o la de distancia punto-plano, fantástico, pero no es requerido.

Puntajes parciales: Si dan sólo el radio de la circunferencia, 1 punto de 3. Si sólo describen el centro de la circunferencia, 2 puntos de 3.

b) Dados $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (3, 5, 2)$ y $P_0 = (1, 2, 7)$, encuentre la ecuación que deben satisfacer α y β para que el punto P definido por

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$$

esté a distancia 5 de $Q = (11, 4, 2)$.

Solución:

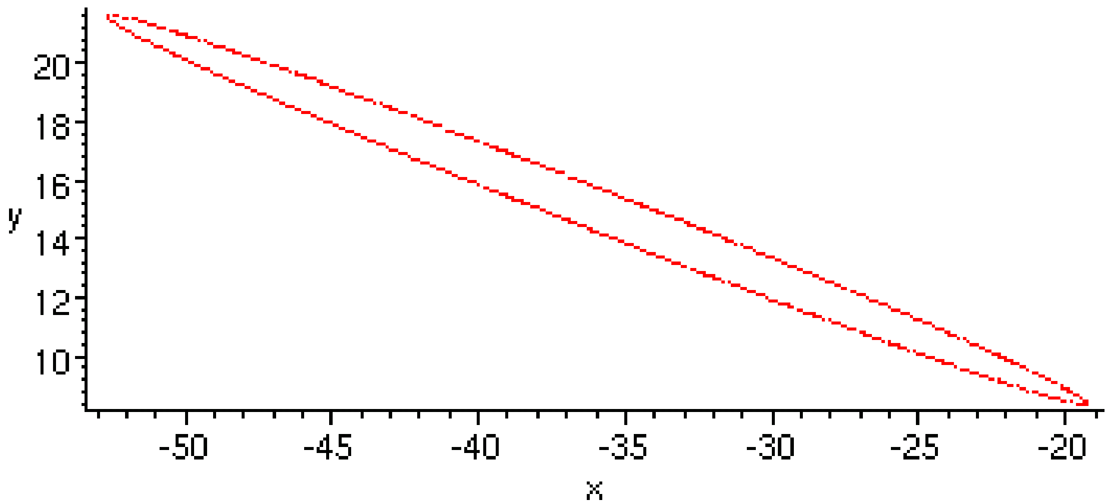
La ecuación que deben satisfacer α y β es

$$3\alpha^2 + 15\alpha\beta + 19\beta^2 - 9\alpha - 30\beta + 52 = 0;$$

(o algún múltiplo de ella).

Esta ecuación puede ser obtenida de diversas maneras:

- aplicando el método sugerido en la parte (a): hallar la proyección ortogonal de Q sobre π, encontrar las coordenadas (α, β) de dicha proyección (tomando como origen a P_0) y resolver en dicho sistema de coordenadas la ecuación $\left\| \overrightarrow{p} - \overrightarrow{q^{\perp}} \right\| = r$.
- mediante “fuerza bruta”, expresando la condición de distancia en términos de



Puntaje: Si el método está correcto —y la respuesta final también— 3 puntos.

Si el método está esencialmente correcto, pero se cometen errores menores de cálculo, 2.5 puntos.

Si la idea para el método está esencialmente correcta, pero hay errores gruesos en el cálculo (o muchos errores chicos), 2 puntos.

Si hay una idea que podría servir, pero tiene errores conceptuales, 1 punto.

MAT 1102 $\star$ Geometría

Solución y Pauta de corrección, Interrogación N°3 – forma B

INSTRUCCIONES:

- Esta prueba consta de tres partes: una de selección múltiple, una de completación de resultados y una de desarrollo. Responda las dos primeras partes en la hoja de respuestas que viene con el cuadernillo, y la parte de desarrollo en las otras hojas de éste.
- La primera parte tiene cuatro preguntas, la segunda dos, y la tercera dos.
- En las partes de selección múltiple y completación de resultados, **sólo se corregirá la respuesta** (no se mirará el desarrollo), y **no se descontará puntaje por respuestas incorrectas**.

PUNTUACIÓN.
La manera de calcular la nota de esta prueba es la siguiente:

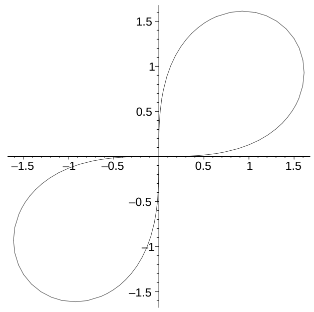
- La primera parte tiene una nota de 1 a 7 (= 2 puntos por cada respuesta correcta, +1 punto base).
- La segunda parte tiene una nota de 1 a 7 (= 3 puntos por cada respuesta correcta, +1 punto base).
- Cada pregunta de la parte de desarrollo tiene una nota de 1 a 7.
- La nota de esta prueba es el promedio de las cuatro notas mencionadas.

TIEMPO: 120 MINUTOS
SIN CONSULTAS
NO SE PERMITE USAR CALCULADORA

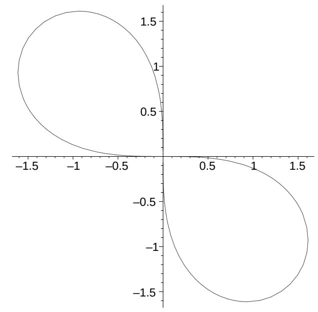
Primera parte: selección múltiple — forma B

1. El gráfico de la curva de ecuación $\quad \rho^2 = -4\cos 2\theta \quad$ es:

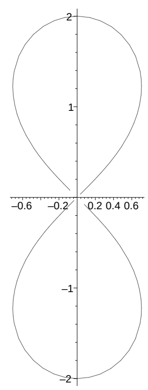
(a)



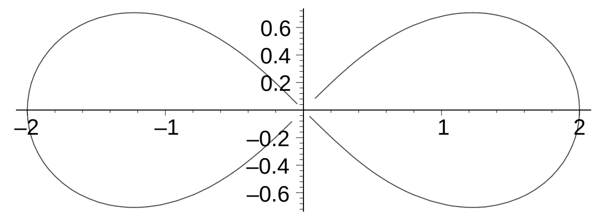
(b)



(c)



(d)



(e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La ecuación dada corresponde a la curva (c).

2. PREGUNTA ELIMINADA

3. La ecuación del plano π que contiene al punto $(1, 2, 1)$ y es perpendicular a la recta de ecuaciones $x - y = 1, \quad z = 1$ es:

(a) $x + z - 2 = 0$ (b) $x + y - 3 = 0$ (c) $y - z = 1$

(d) $x - z = 0$ (e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

El vector director de la recta es el producto cruz de los vectores normales a los planos de ecuaciones $x - y = 1, \quad z = 1$. En este caso, el vector director de la recta es $(1, -1, 0) \times (0, 0, 1) = (-1, -1, 0)$. Si el plano es perpendicular a esta recta, debe ser perpendicular al vector $(-1, -1, 0)$. Así, el plano tiene ecuación de la forma $x + y = k$, y k puede ser determinado ya que el punto $(1, 2, 1)$ debe ser solución de esta ecuación. Finalmente, la respuesta correcta es (b).

4. La ecuación $\quad |z|^2 - 2\mathfrak{Re}((2-i)z) + 4 = 0 \quad$ corresponde a:

   a) La circunferencia de centro en $(-2, 1)$ y radio 1
   b) La circunferencia de centro en $(-2, -1)$ y radio 1
   c) La circunferencia de centro en $(2, 1)$ y radio 1
   d) La circunferencia de centro en $(2, -1)$ y radio 1
   e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

En general, la ecuación $|z|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + k = 0 \quad$ (donde $a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}$) puede ser escrita como

$$|z|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + |a|^2 = |a|^2 - k;$$

equivalentemente,

$$(z-a)(\overline{z-a}) = |a|^2 - k.$$

Esto puede ser expresado como

$$|z-a|^2 = |a|^2 - k,$$

o lo que es lo mismo,

$$|z-a| = \sqrt{|a|^2 - k},$$

por lo que esta ecuación representa una circunferencia de centro en a y radio $\sqrt{|a|^2 - k}$. En nuestro caso, $\overline{a} = 2 - i$, de donde $a = 2 + i$ y $k = 4$, por lo que el centro es $2 + i$ y su radio es $|a|^2 - k = |2+i|^2 - 4 = 5 - 4 = 1$, por lo que la respuesta correcta es (c).

Segunda parte: completación de resultados — forma B

5. Si la circunferencia $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ pasa por los puntos $P_1(3,1)$, $P_2(1,3)$ y $P_3(3,5)$, entonces la ecuación de la circunferencia que pasa por P_1, P_2 y por el centro de $\mathcal{C}$ es:

Solución:

El centro de la circunferencia dada es $(3,3)$ (esto puede ser calculado de diversas maneras). Así, el centro de la circunferencia buscada es $(2,2)$ (de nuevo, esto puede ser calculado de distintas formas), y su radio es $\sqrt{2}$, por lo que su ecuación puede ser escrita como

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

Nota: Esta ecuación también puede ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 3 & 1 \\ 18 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Dada la recta $\ell : 2x + y - 8 = 0$ en $\mathbb{R}^2$, el punto Q simétrico de $P(2,1)$ con respecto a ℓ es:

Solución:

Para encontrar el punto simétrico de $P(2,1)$ con respecto a ℓ, buscaremos en primer lugar la recta ℓ' paralela a ℓ que pasa por $P(2,1)$; esta recta es $2x + y - 5 = 0$.

La recta simétrica a ℓ' respecto de ℓ es la recta $\ell'' : 2x + y - 11 = 0$.

El punto buscado es la intersección entre la recta ℓ'' y la recta $\ell^\perp$, perpendicular a ℓ y que pasa por $P(2,1)$.

Como $\ell^\perp$ tiene por ecuación $x - 2y = 0$, el punto buscado es $Q(22/5, 11/5)$.

Tercera parte: preguntas de desarrollo — forma B

7. *a*) Determine la ecuación del plano que pasa por $(2,1,1)$ y por $(0,1,2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x - y - 2 = 0$.

   Solución:

   El plano buscado tiene como vectores directores a $(2,1,1) - (0,1,2) = (2,0,-1)$ y a $(1,-1,0)$ (el vector normal al plano $x - y - 2 = 0$). Así, un vector normal al plano buscado es $(1,-1,0) \times (2,0,-1) = (1,1,2)$, por lo que la ecuación buscada es de la forma $x + y + 2z = k$ con k constante. Reemplazando cualquiera de los puntos dados se encuentra que $k = 5$.

   Así, finalmente, la ecuación buscada puede escribirse como:

   - $x + y + 2z = 5$ (o $x + y + 2z - 5 = 0$);
   - $(\overrightarrow{p} - (2,1,1)) \cdot (1,1,2) = 0$; (pudiendo reemplazar $(2,1,1)$ por $(0,1,2)$, etc.).

   Puntaje: Si el método usado está condenado al fracaso, puntaje total 0 pts.

   Si el método usado está bueno, pero se cometen errores conceptuales (o si se cometen muchos errores chicos de cálculo) el puntaje máximo es 1 punto (de los 3 que vale esta pregunta).

   Si se cometen pocos (uno o dos) errores de cálculo, puntaje máximo 2 puntos.

   Además, se bajará hasta un punto por escribir fórmulas o comentarios que no vengan al caso (¡aunque sean ciertas!).

   b) Encuentre **todos** los números $z \in \mathbb{C}$ tales que

   $$z^2 - (2i + 1)z + (3 - i) = 0.$$

   Justifique su respuesta.

   Solución:

   Formas de resolverlo:

   - aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado;
   - escribir $z = x + yi$ y tratar de resolver el sistema de ecuaciones resultante.

   En cualquier caso, deberían llegar a que las raíces de la ecuación son

   $$z_1 = i, \quad z_2 = 1 + 3i.$$

Justificación: La justificación puede ser hecha invocando:

1) el teorema demostrado en clases que dice que un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces complejas (contando multiplicidades);
2) una de las formas del Teorema Fundamental del Álgebra (que dice que todo polinomio de grado n tiene *exactamente* n raíces; o
3) cualquier otro argumento equivalente.

Puntaje: El puntaje de la pregunta va de 0 a 3. Por encontrar las soluciones (por algún método razonable como los presentados u otro similar), 2 puntos. Por justificar, hasta 1 punto.

Si hay errores menores (de cálculo, etc.), se descuenta 0.5 a 1 pto. (a criterio del corrector).

Si hay errores mayores (conceptuales) se descuenta 1 o 1.5 ptos., a criterio del corrector.

8. *a*) Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, y sea P_0 un punto fijo en $\mathbb{R}^3$.

Sea π el plano dado por la ecuación

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} \qquad (\text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Así, a cada punto $P \in \pi$ le corresponde un único par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Se sabe que, dado un punto fijo Q en $\mathbb{R}^3$ y un real $d > 0$, el conjunto de puntos $P \in \pi$ cuya distancia a Q es d es una circunferencia (posiblemente degenerada).

Exprese, en términos de $\overrightarrow{q}$ y d, el centro y el radio de dicha circunferencia.

Solución:

Dado un punto de la circunferencia buscada, su distancia a Q es d. Dicho punto forma —con Q y la proyección ortogonal de Q sobre π— un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa mide d y un cateto es la distancia entre Q y π.

Así, el centro de la circunferencia buscada es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre el plano π, y su radio es

$$r = \sqrt{d^2 - (d(Q, \pi))^2},$$

donde $d(Q, \pi)$ es la distancia entre el punto Q y el plano π.

Con esto basta: esto tendría los 3 puntos de la pregunta.

Si alguien da la fórmula de proyección ortogonal, o la de distancia punto-plano, fantástico, pero no es requerido.

Puntajes parciales: Si dan sólo el radio de la circunferencia, 1 punto de 3. Si sólo describen el centro de la circunferencia, 2 puntos de 3.

b) Dados $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (3, 5, 2)$ y $P_0 = (1, 2, 7)$, encuentre la ecuación que deben satisfacer α y β para que el punto P definido por

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$$

esté a distancia 5 de $Q = (11, 4, 2)$.

Solución:

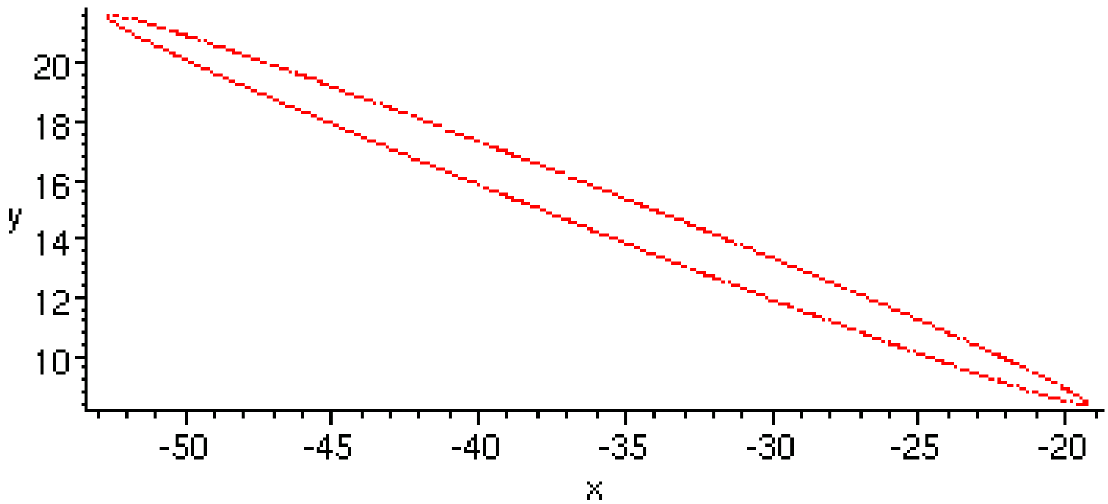
La ecuación que deben satisfacer α y β es

$$3\alpha^2 + 15\alpha\beta + 19\beta^2 - 9\alpha - 30\beta + 52 = 0;$$

(o algún múltiplo de ella).

Esta ecuación puede ser obtenida de diversas maneras:

- aplicando el método sugerido en la parte (a): hallar la proyección ortogonal de Q sobre π, encontrar las coordenadas (α, β) de dicha proyección (tomando como origen a P_0) y resolver en dicho sistema de coordenadas la ecuación $\left\| \overrightarrow{p} - \overrightarrow{q^{\perp}} \right\| = r$.
- mediante “fuerza bruta”, expresando la condición de distancia en términos de



Puntaje: Si el método está correcto —y la respuesta final también— 3 puntos.

Si el método está esencialmente correcto, pero se cometen errores menores de cálculo, 2.5 puntos.

Si la idea para el método está esencialmente correcta, pero hay errores gruesos en el cálculo (o muchos errores chicos), 2 puntos.

Si hay una idea que podría servir, pero tiene errores conceptuales, 1 punto.

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución y Pauta de corrección, Interrogación N°3 – forma C

INSTRUCCIONES:

- Esta prueba consta de tres partes: una de selección múltiple, una de completación de resultados y una de desarrollo. Responda las dos primeras partes en la hoja de respuestas que viene con el cuadernillo, y la parte de desarrollo en las otras hojas de éste.
- La primera parte tiene cuatro preguntas, la segunda dos, y la tercera dos.
- En las partes de selección múltiple y completación de resultados, **sólo se corregirá la respuesta** (no se mirará el desarrollo), y **no se descontará puntaje por respuestas incorrectas**.

PUNTUACIÓN.
La manera de calcular la nota de esta prueba es la siguiente:

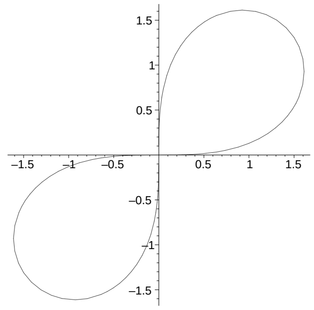
- La primera parte tiene una nota de 1 a 7 (= 2 puntos por cada respuesta correcta, +1 punto base).
- La segunda parte tiene una nota de 1 a 7 (= 3 puntos por cada respuesta correcta, +1 punto base).
- Cada pregunta de la parte de desarrollo tiene una nota de 1 a 7.
- La nota de esta prueba es el promedio de las cuatro notas mencionadas.

Tiempo: 120 minutos
Sin consultas
No se permite usar calculadora

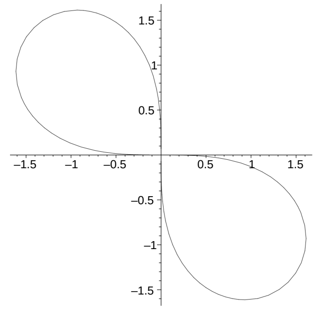
Primera parte: selección múltiple — forma C

1. El gráfico de la curva de ecuación $\rho^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ es:

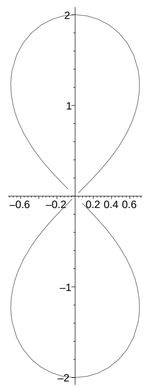
   (a)

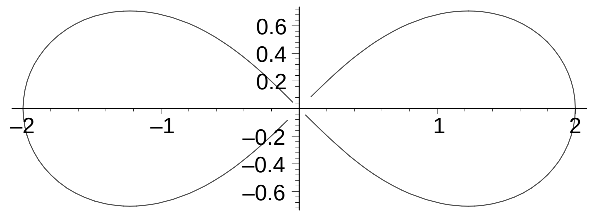
   (b)

   (c)

   (d)

   (e) Ninguna de las anteriores.

   Solución:

   La ecuación dada corresponde a la curva (a).

2. PREGUNTA ELIMINADA

3. La ecuación del plano π que contiene al punto $(1, 2, 1)$ y es perpendicular a la recta de ecuaciones $x - z = 0, \quad y = 2$ es:

   (a) $x + z - 2 = 0$ (b) $x + y - 3 = 0$ (c) $y - z = 1$

   (d) $x - z = 0$ (e) Ninguna de las anteriores.

   Solución:

   El vector director de la recta es el producto cruz de los vectores normales a los planos de ecuaciones $x - z = 0, \quad y = 2$. En este caso, el vector director de la recta es $(1, 0, -1) \times (0, 1, 0) = (1, 0, 1)$. Si el plano es perpendicular a esta recta, debe ser perpendicular al vector $(1, 0, 1)$. Así, el plano tiene ecuación de la forma $x + z = k$, y k puede ser determinado ya que el punto $(1, 2, 1)$ debe ser solución de esta ecuación. Finalmente, la respuesta correcta es (a).

4. La ecuación $\quad |z|^2 - 2\mathfrak{Re}((i+2)z) + 4 = 0 \quad$ corresponde a:

   a) La circunferencia de centro en $(-2, 1)$ y radio 1
   b) La circunferencia de centro en $(-2, -1)$ y radio 1
   c) La circunferencia de centro en $(2, 1)$ y radio 1
   d) La circunferencia de centro en $(2, -1)$ y radio 1
   e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

En general, la ecuación $|z|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + k = 0 \quad$ (donde $a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}$) puede ser escrita como

$$|z|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + |a|^2 = |a|^2 - k;$$

equivalentemente,

$$(z-a)(\overline{z-a}) = |a|^2 - k.$$

Esto puede ser expresado como

$$|z-a|^2 = |a|^2 - k,$$

o lo que es lo mismo,

$$|z-a| = \sqrt{|a|^2 - k},$$

por lo que esta ecuación representa una circunferencia de centro en a y radio $\sqrt{|a|^2 - k}$. En nuestro caso, $\overline{a} = i + 2$, de donde $a = 2 - i$ y $k = 4$, por lo que el centro es $2 - i$ y su radio es $|a|^2 - k = |2-i|^2 - 4 = 5 - 4 = 1$, por lo que la respuesta correcta es (d).

Segunda parte: completación de resultados — forma C

5. Si la circunferencia $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ pasa por los puntos $P_1(3, -1)$, $P_2(1, 1)$ y $P_3(3, 3)$, entonces la ecuación de la circunferencia que pasa por P_1, P_2 y por el centro de $\mathcal{C}$ es:

Solución:

El centro de la circunferencia dada es $(3, 1)$ (esto puede ser calculado de diversas maneras). Así, el centro de la circunferencia buscada es $(2, 0)$ (de nuevo, esto puede ser calculado de distintas formas), y su radio es $\sqrt{2}$, por lo que su ecuación puede ser escrita como

$$(x-2)^2 + y^2 = 2.$$

Nota: Esta ecuación también puede ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 10 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Dada la recta $\ell : 2x + y - 8 = 0$ en $\mathbb{R}^2$, el punto Q simétrico de $P(3,3)$ con respecto a ℓ es:

   Solución:

   Para encontrar el punto simétrico de $P(3,3)$ con respecto a ℓ, buscaremos en primer lugar la recta ℓ' paralela a ℓ que pasa por $P(3,3)$; esta recta es $2x + y - 9 = 0$.

   La recta simétrica a ℓ' respecto de ℓ es la recta $\ell'' : 2x + y - 7 = 0$.

   El punto buscado es la intersección entre la recta ℓ'' y la recta $\ell^\perp$, perpendicular a ℓ y que pasa por $P(3,3)$.

   Como $\ell^\perp$ tiene por ecuación $x - 2y + 3 = 0$, el punto buscado es $Q(11/5, 13/5)$.

Tercera parte: preguntas de desarrollo — forma C

7. *a*) Determine la ecuación del plano que pasa por $(2,1,1)$ y por $(0,1,2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x - y - 2 = 0$.

   Solución:

   El plano buscado tiene como vectores directores a $(2,1,1) - (0,1,2) = (2,0,-1)$ y a $(1,-1,0)$ (el vector normal al plano $x - y - 2 = 0$). Así, un vector normal al plano buscado es $(1,-1,0) \times (2,0,-1) = (1,1,2)$, por lo que la ecuación buscada es de la forma $x + y + 2z = k$ con k constante. Reemplazando cualquiera de los puntos dados se encuentra que $k = 5$.

   Así, finalmente, la ecuación buscada puede escribirse como:

   - $x + y + 2z = 5$ (o $x + y + 2z - 5 = 0$);
   - $(\overrightarrow{p} - (2,1,1)) \cdot (1,1,2) = 0$; (pudiendo reemplazar $(2,1,1)$ por $(0,1,2)$, etc.).

   Puntaje: Si el método usado está condenado al fracaso, puntaje total 0 pts.

   Si el método usado está bueno, pero se cometen errores conceptuales (o si se cometen muchos errores chicos de cálculo) el puntaje máximo es 1 punto (de los 3 que vale esta pregunta).

   Si se cometen pocos (uno o dos) errores de cálculo, puntaje máximo 2 puntos.

   Además, se bajará hasta un punto por escribir fórmulas o comentarios que no vengan al caso (¡aunque sean ciertas!).

   b) Encuentre **todos** los números $z \in \mathbb{C}$ tales que

   $$z^2 - (2i + 1)z + (3 - i) = 0.$$

   Justifique su respuesta.

   Solución:

   Formas de resolverlo:

   - aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado;
   - escribir $z = x + yi$ y tratar de resolver el sistema de ecuaciones resultante.

   En cualquier caso, deberían llegar a que las raíces de la ecuación son

   $$z_1 = i, \quad z_2 = 1 + 3i.$$

Justificación: La justificación puede ser hecha invocando:

1) el teorema demostrado en clases que dice que un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces complejas (contando multiplicidades);
2) una de las formas del Teorema Fundamental del Álgebra (que dice que todo polinomio de grado n tiene *exactamente* n raíces; o
3) cualquier otro argumento equivalente.

Puntaje: El puntaje de la pregunta va de 0 a 3. Por encontrar las soluciones (por algún método razonable como los presentados u otro similar), 2 puntos. Por justificar, hasta 1 punto.

Si hay errores menores (de cálculo, etc.), se descuenta 0.5 a 1 pto. (a criterio del corrector).

Si hay errores mayores (conceptuales) se descuenta 1 o 1.5 ptos., a criterio del corrector.

8. *a*) Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, y sea P_0 un punto fijo en $\mathbb{R}^3$.

Sea π el plano dado por la ecuación

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} \qquad (\text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Así, a cada punto $P \in \pi$ le corresponde un único par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Se sabe que, dado un punto fijo Q en $\mathbb{R}^3$ y un real $d > 0$, el conjunto de puntos $P \in \pi$ cuya distancia a Q es d es una circunferencia (posiblemente degenerada).

Exprese, en términos de $\overrightarrow{q}$ y d, el centro y el radio de dicha circunferencia.

Solución:

Dado un punto de la circunferencia buscada, su distancia a Q es d. Dicho punto forma —con Q y la proyección ortogonal de Q sobre π— un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa mide d y un cateto es la distancia entre Q y π.

Así, el centro de la circunferencia buscada es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre el plano π, y su radio es

$$r = \sqrt{d^2 - (d(Q, \pi))^2},$$

donde $d(Q, \pi)$ es la distancia entre el punto Q y el plano π.

Con esto basta: esto tendría los 3 puntos de la pregunta.

Si alguien da la fórmula de proyección ortogonal, o la de distancia punto-plano, fantástico, pero no es requerido.

Puntajes parciales: Si dan sólo el radio de la circunferencia, 1 punto de 3. Si sólo describen el centro de la circunferencia, 2 puntos de 3.

b) Dados $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (3, 5, 2)$ y $P_0 = (1, 2, 7)$, encuentre la ecuación que deben satisfacer α y β para que el punto P definido por

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$$

esté a distancia 5 de $Q = (11, 4, 2)$.

Solución:

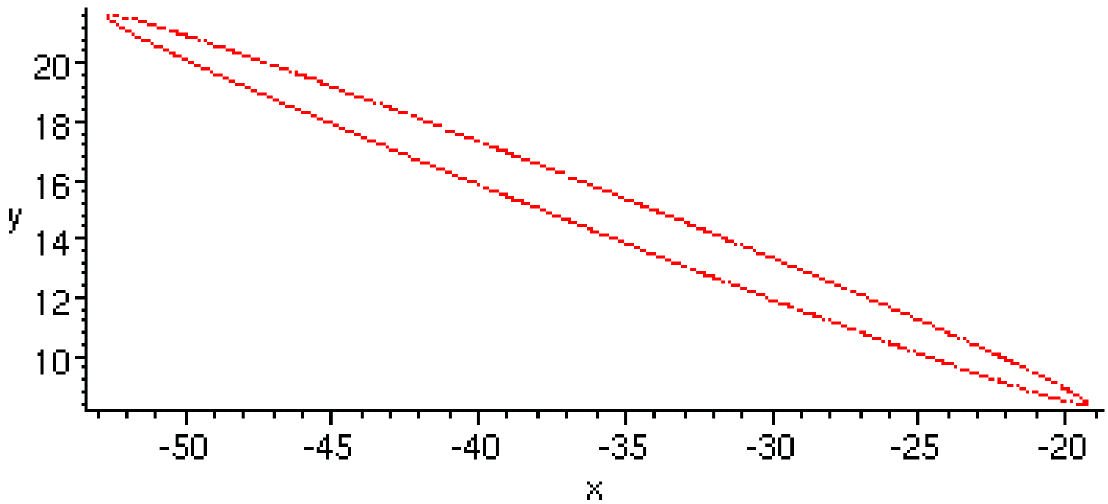
La ecuación que deben satisfacer α y β es

$$3\alpha^2 + 15\alpha\beta + 19\beta^2 - 9\alpha - 30\beta + 52 = 0;$$

(o algún múltiplo de ella).

Esta ecuación puede ser obtenida de diversas maneras:

- aplicando el método sugerido en la parte (a): hallar la proyección ortogonal de Q sobre π, encontrar las coordenadas (α, β) de dicha proyección (tomando como origen a P_0) y resolver en dicho sistema de coordenadas la ecuación $\left\| \overrightarrow{p} - \overrightarrow{q^{\perp}} \right\| = r$.
- mediante "fuerza bruta", expresando la condición de distancia en términos de



Puntaje: Si el método está correcto —y la respuesta final también— 3 puntos.

Si el método está esencialmente correcto, pero se cometen errores menores de cálculo, 2.5 puntos.

Si la idea para el método está esencialmente correcta, pero hay errores gruesos en el cálculo (o muchos errores chicos), 2 puntos.

Si hay una idea que podría servir, pero tiene errores conceptuales, 1 punto.

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución y Pauta de corrección, Interrogación N°3 – forma D

INSTRUCCIONES:

- Esta prueba consta de tres partes: una de selección múltiple, una de completación de resultados y una de desarrollo. Responda las dos primeras partes en la hoja de respuestas que viene con el cuadernillo, y la parte de desarrollo en las otras hojas de éste.
- La primera parte tiene cuatro preguntas, la segunda dos, y la tercera dos.
- En las partes de selección múltiple y completación de resultados, **sólo se corregirá la respuesta** (no se mirará el desarrollo), y **no se descontará puntaje por respuestas incorrectas**.

PUNTUACIÓN.
La manera de calcular la nota de esta prueba es la siguiente:

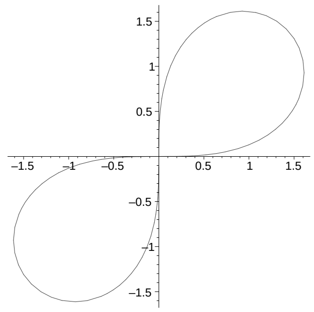
- La primera parte tiene una nota de 1 a 7 (= 2 puntos por cada respuesta correcta, +1 punto base).
- La segunda parte tiene una nota de 1 a 7 (= 3 puntos por cada respuesta correcta, +1 punto base).
- Cada pregunta de la parte de desarrollo tiene una nota de 1 a 7.
- La nota de esta prueba es el promedio de las cuatro notas mencionadas.

Tiempo: 120 minutos
Sin consultas
No se permite usar calculadora

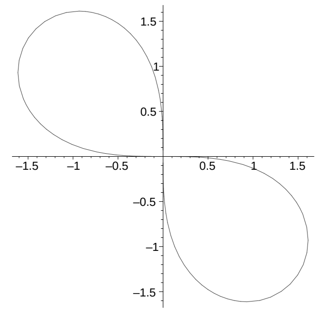
Primera parte: selección múltiple — forma D

1. El gráfico de la curva de ecuación $\rho^2 = 4\cos 2\theta$ es:

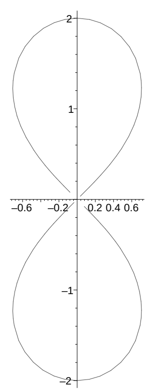
(a)



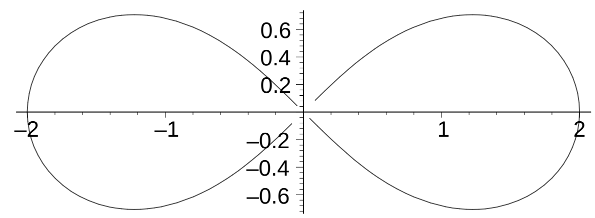
(b)



(c)



(d)



(e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La ecuación dada corresponde a la curva (d).

2. PREGUNTA ELIMINADA

3. La ecuación del plano π que contiene al punto $(1, 2, 1)$ y es perpendicular a la recta de ecuaciones $y + z = 2, \quad x = 1$ es:

(a) $x + z - 2 = 0$ (b) $x + y - 3 = 0$ (c) $y - z = 1$

(d) $x - z = 0$ (e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

El vector director de la recta es el producto cruz de los vectores normales a los planos de ecuaciones $y + z = 2, \quad x = 1$. En este caso, el vector director de la recta es $(0, 1, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, -1)$. Si el plano es perpendicular a esta recta, debe ser perpendicular al vector $(0, 1, -1)$. Así, el plano tiene ecuación de la forma $y - z = k$, y k puede ser determinado ya que el punto $(1, 2, 1)$ debe ser solución de esta ecuación. Finalmente, la respuesta correcta es (c).

4. La ecuación $\quad |z|^2 - 2\mathfrak{Re}((-2-i)z) + 4 = 0 \quad$ corresponde a:

   a) La circunferencia de centro en $(-2, 1)$ y radio 1
   b) La circunferencia de centro en $(-2, -1)$ y radio 1
   c) La circunferencia de centro en $(2, 1)$ y radio 1
   d) La circunferencia de centro en $(2, -1)$ y radio 1
   e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

En general, la ecuación $|z|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + k = 0 \quad$ (donde $a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}$) puede ser escrita como

$$|z|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + |a|^2 = |a|^2 - k;$$

equivalentemente,

$$(z-a)(\overline{z-a}) = |a|^2 - k.$$

Esto puede ser expresado como

$$|z-a|^2 = |a|^2 - k,$$

o lo que es lo mismo,

$$|z-a| = \sqrt{|a|^2 - k},$$

por lo que esta ecuación representa una circunferencia de centro en a y radio $\sqrt{|a|^2 - k}$. En nuestro caso, $\overline{a} = -2 - i$, de donde $a = -2 + i$ y $k = 4$, por lo que el centro es $-2 + i$ y su radio es $|a|^2 - k = |-2+i|^2 - 4 = 5 - 4 = 1$, por lo que la respuesta correcta es (?).

Segunda parte: completación de resultados — forma D

5. Si la circunferencia $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ pasa por los puntos $P_1(1, 1)$, $P_2(-1, 3)$ y $P_3(1, 5)$, entonces la ecuación de la circunferencia que pasa por P_1, P_2 y por el centro de $\mathcal{C}$ es:

Solución:

El centro de la circunferencia dada es $(1, 3)$ (esto puede ser calculado de diversas maneras). Así, el centro de la circunferencia buscada es $(0, 2)$ (de nuevo, esto puede ser calculado de distintas formas), y su radio es $\sqrt{2}$, por lo que su ecuación puede ser escrita como

$$x^2 + (y-2)^2.$$

Nota: Esta ecuación también puede ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 3 & 1 \\ 10 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Dada la recta $\ell : 2x + y - 8 = 0$ en $\mathbb{R}^2$, el punto Q simétrico de $P(5, 1)$ con respecto a ℓ es:

Solución:

Para encontrar el punto simétrico de $P(5, 1)$ con respecto a ℓ, buscaremos en primer lugar la recta ℓ' paralela a ℓ que pasa por $P(5, 1)$; esta recta es $2x + y - 11 = 0$.

La recta simétrica a ℓ' respecto de ℓ es la recta $\ell'' : 2x + y - 5 = 0$.

El punto buscado es la intersección entre la recta ℓ'' y la recta $\ell^\perp$, perpendicular a ℓ y que pasa por $P(5, 1)$.

Como $\ell^\perp$ tiene por ecuación $x - 2y - 3 = 0$, el punto buscado es $Q(13/5, -1/5)$.

Tercera parte: preguntas de desarrollo — forma D

7. *a*) Determine la ecuación del plano que pasa por $(2, 1, 1)$ y por $(0, 1, 2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x - y - 2 = 0$.

Solución:

El plano buscado tiene como vectores directores a $(2, 1, 1) - (0, 1, 2) = (2, 0, -1)$ y a $(1, -1, 0)$ (el vector normal al plano $x - y - 2 = 0$). Así, un vector normal al plano buscado es $(1, -1, 0) \times (2, 0, -1) = (1, 1, 2)$, por lo que la ecuación buscada es de la forma $x + y + 2z = k$ con k constante. Reemplazando cualquiera de los puntos dados se encuentra que $k = 5$.

Así, finalmente, la ecuación buscada puede escribirse como:

- $x + y + 2z = 5$ (o $x + y + 2z - 5 = 0$);
- $(\overrightarrow{p} - (2, 1, 1)) \cdot (1, 1, 2) = 0$; (pudiendo reemplazar $(2, 1, 1)$ por $(0, 1, 2)$, etc.).

Puntaje: Si el método usado está condenado al fracaso, puntaje total 0 pts.

Si el método usado está bueno, pero se cometen errores conceptuales (o si se cometen muchos errores chicos de cálculo) el puntaje máximo es 1 punto (de los 3 que vale esta pregunta).

Si se cometen pocos (uno o dos) errores de cálculo, puntaje máximo 2 puntos.

Además, se bajará hasta un punto por escribir fórmulas o comentarios que no vengan al caso (¡aunque sean ciertas!).

b) Encuentre **todos** los números $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$z^2 - (2i + 1)z + (3 - i) = 0.$$

Justifique su respuesta.

Solución:

Formas de resolverlo:

- aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado;
- escribir $z = x + yi$ y tratar de resolver el sistema de ecuaciones resultante.

En cualquier caso, deberían llegar a que las raíces de la ecuación son

$$z_1 = i, \quad z_2 = 1 + 3i.$$

Justificación: La justificación puede ser hecha invocando:

1) el teorema demostrado en clases que dice que un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces complejas (contando multiplicidades);
2) una de las formas del Teorema Fundamental del Álgebra (que dice que todo polinomio de grado n tiene *exactamente* n raíces; o
3) cualquier otro argumento equivalente.

Puntaje: El puntaje de la pregunta va de 0 a 3. Por encontrar las soluciones (por algún método razonable como los presentados u otro similar), 2 puntos. Por justificar, hasta 1 punto.

Si hay errores menores (de cálculo, etc.), se descuenta 0.5 a 1 pto. (a criterio del corrector).

Si hay errores mayores (conceptuales) se descuenta 1 o 1.5 ptos., a criterio del corrector.

8. *a*) Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, y sea P_0 un punto fijo en $\mathbb{R}^3$.

Sea π el plano dado por la ecuación

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} \qquad (\text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Así, a cada punto $P \in \pi$ le corresponde un único par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Se sabe que, dado un punto fijo Q en $\mathbb{R}^3$ y un real $d > 0$, el conjunto de puntos $P \in \pi$ cuya distancia a Q es d es una circunferencia (posiblemente degenerada).

Exprese, en términos de $\overrightarrow{q}$ y d, el centro y el radio de dicha circunferencia.

Solución:

Dado un punto de la circunferencia buscada, su distancia a Q es d. Dicho punto forma —con Q y la proyección ortogonal de Q sobre π— un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa mide d y un cateto es la distancia entre Q y π.

Así, el centro de la circunferencia buscada es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{q}$ sobre el plano π, y su radio es

$$r = \sqrt{d^2 - (d(Q, \pi))^2},$$

donde $d(Q, \pi)$ es la distancia entre el punto Q y el plano π.

Con esto basta: esto tendría los 3 puntos de la pregunta.

Si alguien da la fórmula de proyección ortogonal, o la de distancia punto-plano, fantástico, pero no es requerido.

Puntajes parciales: Si dan sólo el radio de la circunferencia, 1 punto de 3. Si sólo describen el centro de la circunferencia, 2 puntos de 3.

b) Dados $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (3, 5, 2)$ y $P_0 = (1, 2, 7)$, encuentre la ecuación que deben satisfacer α y β para que el punto P definido por

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$$

esté a distancia 5 de $Q = (11, 4, 2)$.

Solución:

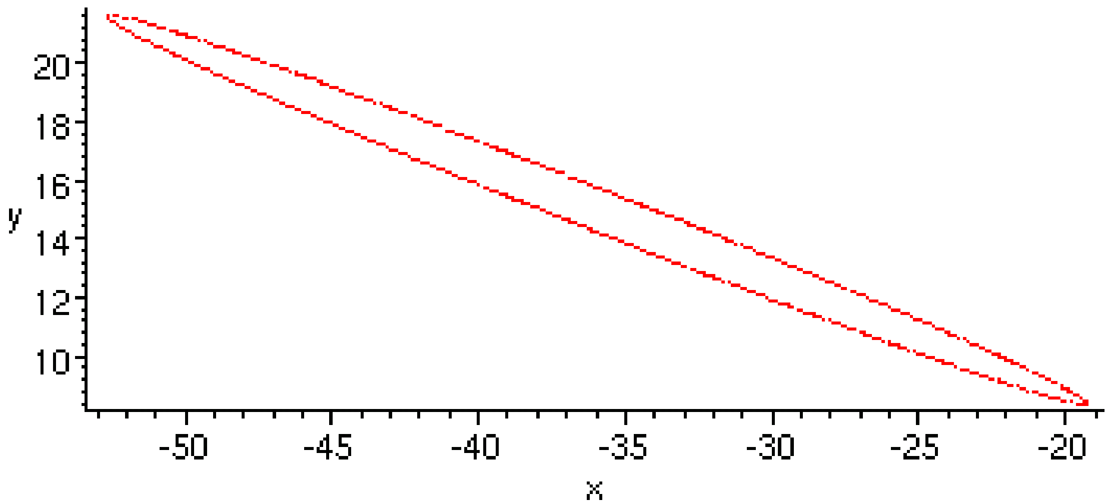
La ecuación que deben satisfacer α y β es

$$3\alpha^2 + 15\alpha\beta + 19\beta^2 - 9\alpha - 30\beta + 52 = 0;$$

(o algún múltiplo de ella).

Esta ecuación puede ser obtenida de diversas maneras:

- aplicando el método sugerido en la parte (a): hallar la proyección ortogonal de Q sobre π, encontrar las coordenadas (α, β) de dicha proyección (tomando como origen a P_0) y resolver en dicho sistema de coordenadas la ecuación $\left\| \overrightarrow{p} - \overrightarrow{q^{\perp}} \right\| = r$.
- mediante "fuerza bruta", expresando la condición de distancia en términos de



Puntaje: Si el método está correcto —y la respuesta final también— 3 puntos.

Si el método está esencialmente correcto, pero se cometen errores menores de cálculo, 2.5 puntos.

Si la idea para el método está esencialmente correcta, pero hay errores gruesos en el cálculo (o muchos errores chicos), 2 puntos.

Si hay una idea que podría servir, pero tiene errores conceptuales, 1 punto.