Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución — Control N°1
Versión A

1. Demuestre que, si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, entonces

$$\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha = 1.$$

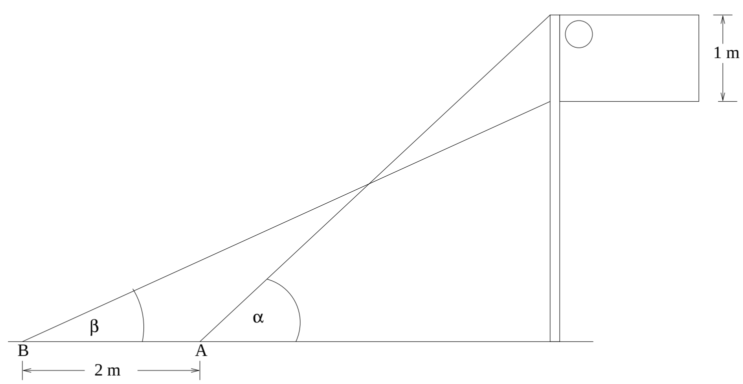
Solución:

Supongamos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
& \cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha \\
= & \cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot(-\alpha-\beta) + \cot(-\alpha-\beta)\cot\alpha \\
= & \cot\alpha\cot\beta - \cot\beta\cot(\alpha+\beta) - \cot(\alpha+\beta)\cot\alpha \\
= & \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} - \frac{1}{\tan\beta\tan(\alpha+\beta)} - \frac{1}{\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)} \\
= & \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} - \frac{1}{\frac{\tan\beta(\tan\alpha+\tan\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}} - \frac{1}{\frac{\tan\alpha(\tan\alpha+\tan\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}} - \\
= & \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} - \frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta(\tan\alpha+\tan\beta)}\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha(\tan\alpha+\tan\beta)} \\
= & \frac{(\tan\alpha+\tan\beta) - \tan\alpha(1-\tan\alpha\tan\beta) - \tan\beta(1-\tan\alpha\tan\beta)}{\tan\alpha\tan\beta(\tan\alpha+\tan\beta)} \\
= & \frac{\tan\alpha + \tan\beta - \tan\alpha + \tan^2\alpha\tan\beta - \tan\beta + \tan\alpha\tan^2\beta}{\tan\alpha\tan\beta(\tan\alpha+\tan\beta)} \\
= & \frac{\tan^2\alpha\tan\beta + \tan\alpha\tan^2\beta}{\tan\alpha\tan\beta(\tan\alpha+\tan\beta)} \\
= & 1.
\end{aligned}$$

2. Del extremo de un asta bandera se amarra una cuerda tensa, que toca el suelo en un punto A, formando un ángulo α con el suelo. Al tope del asta flamea una bandera de 1 metro de alto por 1.5 metros de ancho. Desde la parte inferior de esta bandera se se amarra otra cuerda tensa, que toca el suelo en un punto B, 2 metros más alejado del asta que A, formando con el suelo un ángulo β.

   Calcule la altura total del asta de bandera, en función de α y β.



Solución:

En la figura, sean h la altura total del asta, y sea x la distancia entre el asta y el punto A.

Claramente, en los triángulos rectángulos que se forman se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{h}{x},\\ \tan\beta &= \frac{h-1}{x+2}.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se tiene

$$\begin{aligned}x &= \frac{2\tan\beta+1}{\tan\alpha-\tan\beta},\\ h &= \frac{\tan\alpha(2\tan\beta+1)}{\tan\alpha-\tan\beta}\end{aligned}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución — Control N°1
Versión B

1. Demuestre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

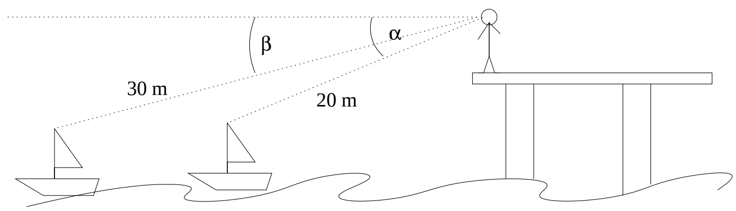
$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 9x = 4\cos x \cos 2x \operatorname{sen} 6x.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 9x \\
= \; & (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x) + (\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 9x) \\
= \; & 2\operatorname{sen}\left(\frac{3x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{7x+9x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x-7x}{2}\right) \\
= \; & 2\operatorname{sen} 2x \cos x + 2\operatorname{sen} 8x \cos x \\
= \; & 2\cos x(\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 8x) \\
= \; & 2\cos x\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{4x+8x}{2}\right)\cos\left(\frac{8x-4x}{2}\right)\right) \\
= \; & 4\cos x \operatorname{sen} 6x \cos 2x.
\end{aligned}$$

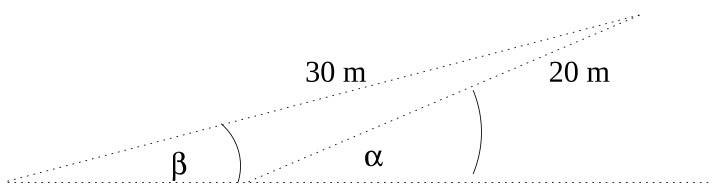
2. Desde un muelle un observador ve dos botes en la misma dirección, en ángulos de depresión de α y β respectivamente.

   Se sabe que las distancias entre el observador y los botes son de 20 y 30 metros respectivamente. Calcule la distancia entre los botes, en función de α y β.



   Solución:

   Sea x la distancia entre ambos botes. Considerando el triángulo en la siguiente figura, se tiene (por el teorema del seno, y ya que el ángulo en la esquina superior derecha mide $\alpha - \beta$):



$$\frac{30}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)} = \frac{20}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{x}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}.$$

Esto es equivalente a:

$$\frac{30}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{20}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{x}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)},$$

de donde $x = \dfrac{20 \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen} \beta}$, o $x = \dfrac{30 \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen} \alpha}$.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2001

MAT 1102 ⋆ Geometría

Solución — Control N°1
Versión C

1. Demuestre que, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

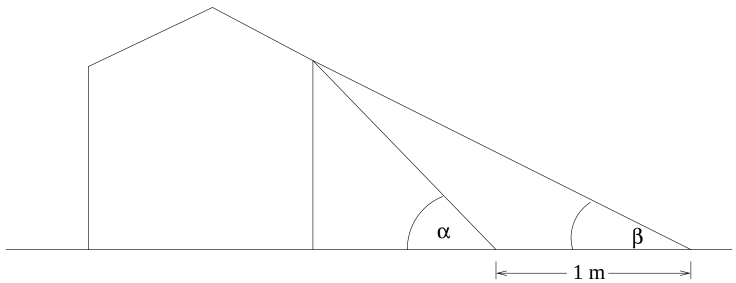
$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - 2\beta) - \operatorname{sen} 6\beta}{\cos(\alpha - 2\beta) + \cos 6\beta} = \tan\left(\frac{\alpha - 8\beta}{2}\right).$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(\alpha - 2\beta) - \operatorname{sen} 6\beta}{\cos(\alpha - 2\beta) + \cos 6\beta} &= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{(\alpha-2\beta)-6\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{(\alpha-2\beta)+6\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{(\alpha-2\beta)+6\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{(\alpha-2\beta)-6\beta}{2}\right)} \\
&= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-8\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+4\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-8\beta}{2}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-8\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-8\beta}{2}\right)} \\
&= \tan\left(\frac{\alpha - 8\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

2. Un extremo de una carpa está sujeto por cuerdas a dos estacas clavadas en el suelo. Las cuerdas forman ángulos de α y β con el suelo.

   Se sabe que la distancia entre las estacas es 1 metro. Calcule el largo de la cuerda más larga, en función de α y β.



Solución:

Sea x el largo de la cuerda más larga. En la figura, se tiene (por el teorema del seno, y ya que el ángulo en la esquina superior derecha mide $\alpha - \beta$):

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}.$$

Esto es equivalente a:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)},$$

de donde $x = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}$.