Solución — Control N°2
Versión A

1. Demostrar que :

$$\operatorname{Arccos} x = 2 \operatorname{Arcsen} \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

Solución:

Sea $\beta = \operatorname{Arcsen} \sqrt{\frac{1-x}{2}}$

$$\text{Como } \beta = \operatorname{Arcsen} \sqrt{\frac{1-x}{2}} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \beta = \sqrt{\frac{1-x}{2}} \\ \\ \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \cos 2\beta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \beta = 1 - 2\,\frac{(1-x)}{2} = x$$

$$\Longrightarrow \cos 2\beta = x \ \wedge\ 0 \leq 2\beta \leq \pi$$

$$\Longrightarrow 2\beta = \operatorname{Arccos} x$$

$$\Longrightarrow 2 \operatorname{Arcsen} \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \operatorname{Arccos} x$$

Solución — Control N°2
Versión A

2. Demostrar que en todo triángulo se verifica que :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\frac{c+b}{c-b}\,\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Solución:

Por teorema del seno, $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}\Longrightarrow\dfrac{c}{b}=\dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}$

$$\Longrightarrow\frac{c+b}{c-b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\beta}=\frac{2\ \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)}{2\ \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)}$$

Como $\alpha+\beta+\gamma=\pi\Longrightarrow\dfrac{\gamma+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$,

$$\Longrightarrow\frac{c+b}{c-b}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)}=\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \cot\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow\frac{c+b}{c-b}\,\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cot\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right).$$

Como $\alpha+\beta+\gamma=\pi\Longrightarrow\dfrac{\alpha}{2}+\beta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}+\dfrac{\beta}{2}$

Luego $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)\right)=\cot\left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)$

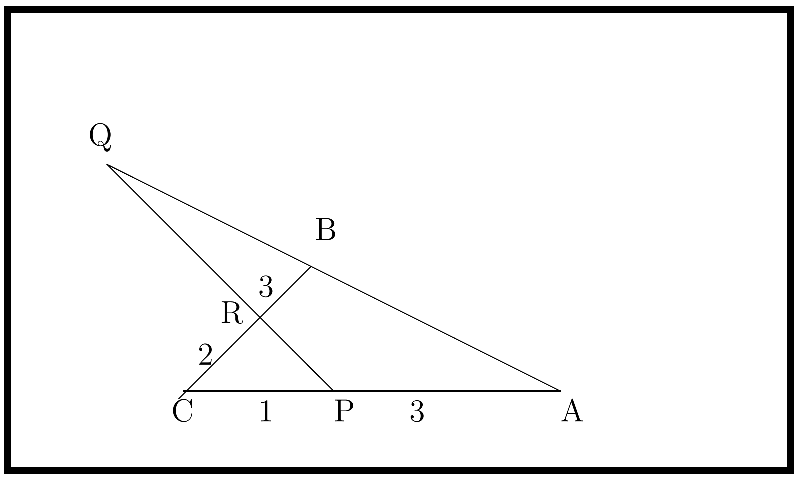
$$\Longrightarrow\frac{c+b}{c-b}\,\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$$

Solución — Control N°2
Versión A

3. En un triángulo ABC se consideran los puntos $P \in \overline{CA}$, $Q \in \overline{AB}$ y $R \in \overline{BC}$, de modo que P divide a $\overline{CA}$ en razón $1/3$, B es el punto medio de $\overline{AQ}$ y R divide a $\overline{BC}$ en razón $3/2$.

   Demuestre que P, Q y R son colineales.

   Solución



Ubicando el origen en C se tiene :

$$\vec{r} = \frac{2\,\vec{b}}{5}\ ,\ \vec{p} = \frac{\vec{a}}{4}\ ,\ \vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{q}}{2}$$

$$\Longrightarrow \vec{q} = 2\,\vec{b} - \vec{a} = 5\,\vec{r} - 4\,\vec{p}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{q} - 5\,\vec{r} + 4\,\vec{p} = 0 \\ \wedge \\ 1 - 5 + 4 = 0 \end{array} \right|$$

$$\Longrightarrow \quad P\,,\ R\,\text{y}\,Q \quad \text{son colineales}$$

Solución — Control N°2
Versión B

1. Resuelva la ecuación:

$$2\,\cos x\,\cot x + 1 = \cot x + 2\,\cos x$$

Solución

$$\begin{aligned}
&2\,\cos x\,\cot x + 1 = \cot x + 2\,\cos x \\
&\Longrightarrow 2\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} + 1 = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + 2\,\cos x \\
&\Longrightarrow 2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = \cos x + 2\,\cos x\,\operatorname{sen} x \\
&\Longrightarrow 2\cos^2 x - 2\,\cos x\,\operatorname{sen} x = \cos x - \operatorname{sen} x \\
&\Longrightarrow 2\,\cos x\,(\cos x - \operatorname{sen} x) = \cos x - \operatorname{sen} x \\
&\Longrightarrow (\cos x - \operatorname{sen} x)\,(2\,\cos x - 1) = 0 \\
&\Longrightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \,\vee\, \cos x = \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow \tan x = 1 \,\vee\, \cos x = \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\vee\, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\,k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Solución — Control N°2
Versión B

2. Demuestre que si en un ΔABC se tiene

$$\left(a^2+b^2\right)\,\text{sen}\,(\alpha-\beta)=\left(a^2-b^2\right)\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)$$

entonces el triángulo es isósceles o rectángulo.

$$\begin{aligned}
&\left(a^2+b^2\right)\,\text{sen}\,(\alpha-\beta)=\left(a^2-b^2\right)\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)\\
\Leftrightarrow\ &\left(a^2+b^2\right)\,\text{sen}\,(\alpha-\beta)-\left(a^2-b^2\right)\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)=0\\
\Leftrightarrow\ &a^2\left(\text{sen}\,(\alpha-\beta)-\text{sen}\,(\alpha+\beta)\right)+b^2\left(\text{sen}\,(\alpha-\beta)+\text{sen}\,(\alpha+\beta)\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &a^2\left(2\ \text{sen}(-\beta)\cos\alpha\right)+b^2\left(2\ \text{sen}\,\alpha\cos\beta\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &b^2\ \text{sen}\,\alpha\ \cos\beta-a^2\ \text{sen}\,\beta\ \cos\alpha=0
\end{aligned}$$

Por teorema del seno $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{a}=\dfrac{\text{sen}\,\beta}{b}\implies b\ \text{sen}\,\alpha=a\ \text{sen}\,\beta$; por lo tanto:

$$\left(a^2+b^2\right)\,\text{sen}\,(\alpha-\beta)=\left(a^2-b^2\right)\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)\Leftrightarrow a\,b\ \text{sen}\,\beta\ \cos\beta-a^2\ \text{sen}\,\beta\ \cos\alpha=0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow a\ \text{sen}\,\beta\,[b\ \cos\beta-a\ \cos\alpha]=0\\
&\Leftrightarrow [b\ \cos\beta-a\ \cos\alpha]=0\\
&\Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\\
&\Leftrightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\quad\text{por teorema del seno}\\
&\Leftrightarrow \text{sen}\ 2\beta=\text{sen}\ 2\alpha\\
&\Leftrightarrow 2\,\beta=2\,\alpha\ \vee\ 2\,\beta=\pi-2\,\alpha\\
&\Leftrightarrow \beta=\alpha\ \vee\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\\
&\Leftrightarrow \beta=\alpha\ \vee\ \gamma=\pi-(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

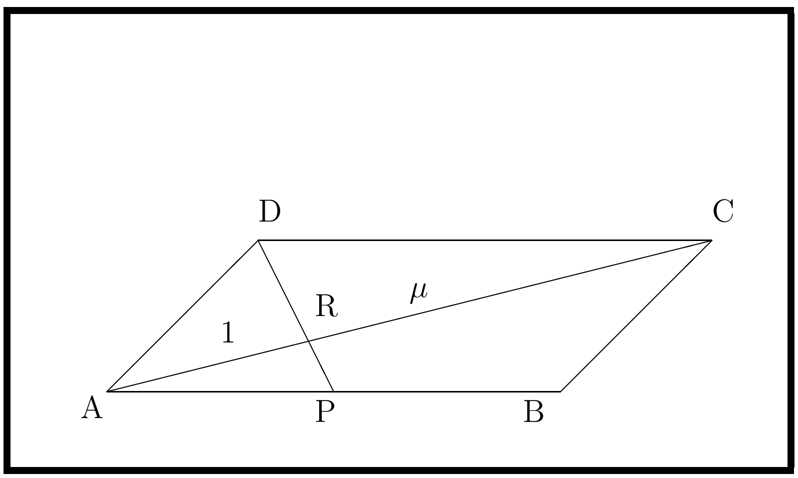
$\Leftrightarrow$ el triángulo es isósceles o rectángulo.

Solución — Control N°2
Versión B

3. Sea $ABCD$ un paralelógramo. sea R el punto donde la recta $\overline{AC}$ corta a la recta que une D con el punto medio de $\overline{AB}$.

   Demuestre que R trisecta a $\overline{AC}$.

   Solución



Ubicando el origen en D se tiene :

$$\vec{r} = \alpha \vec{p} \ \wedge \ \vec{r} = \frac{\mu \vec{a} + \vec{c}}{1+\mu} \ \wedge \ \vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

Como $ABCD$ es un paralelógramo entonces $\vec{b} - \vec{a} = \vec{c}$, luego

$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \Longrightarrow \vec{p} = \frac{2\vec{a} + \vec{c}}{2}$$

Y entonces :

$$\vec{r} = \frac{\mu \vec{a} + \vec{c}}{1+\mu} \ \wedge \ \vec{r} = \alpha \vec{a} + \alpha \frac{\vec{c}}{2}$$

como $\vec{a}$ y $\vec{c}$ son l.i., entonces:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\mu}{1+\mu} = & \alpha \\ \frac{1}{1+\mu} = & \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mu = 2$$

Luego R trisecta AC

Solución — Control N°2
Versión C

1. Resuelva la ecuación
$$\operatorname{sen} 3x = 8\, \operatorname{sen}^3 x$$

Solución

$$\operatorname{sen} 3x = 8\, \operatorname{sen}^3 x$$
$$\Longrightarrow 3\, \operatorname{sen} x - 4\, \operatorname{sen}^3 x = 8\, \operatorname{sen}^3 x$$
$$\Longrightarrow 12\, \operatorname{sen}^3 x - 3\, \operatorname{sen} x = 0$$
$$\Longrightarrow 3\, \operatorname{sen} x \left(4\, \operatorname{sen}^2 x - 1\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \vee \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow x = k\pi \ k \in \mathbb{Z} \ \vee \ x = \begin{cases} \pi/6 + 2\,k\pi \\ 5\,\pi/6 + 2\,k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$
$$\vee\ x = \begin{cases} -\pi/6 + 2\,k\pi \\ -5\,\pi/6 + 2\,k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Solución — Control N°2
Versión C

2. Demuestre que en todo ΔABC se verifica:

$$\left(\frac{a+b}{c}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\cos\,\alpha + \cos\,\beta}{2}$$

Solución

Por Teorema del seno, como :

$$\frac{\operatorname{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\,\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\,\gamma}{c}$$

$$\Longrightarrow \frac{a+b}{\operatorname{sen}\,\alpha + \operatorname{sen}\,\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\,\gamma} \Longrightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\,\alpha + \operatorname{sen}\,\beta}{\operatorname{sen}\,\gamma}$$

Ahora :

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{c} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\,\alpha + \operatorname{sen}\,\beta}{\operatorname{sen}\,\gamma} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sen}\,\alpha + \operatorname{sen}\,\beta}{2\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sen}\,\alpha + \operatorname{sen}\,\beta}{2} \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= \cancel{2}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cancel{2}} \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)
\end{aligned}$$

Como $\alpha+\beta+\gamma=\pi \Longrightarrow \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, entonces:

$$\frac{a+b}{c} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

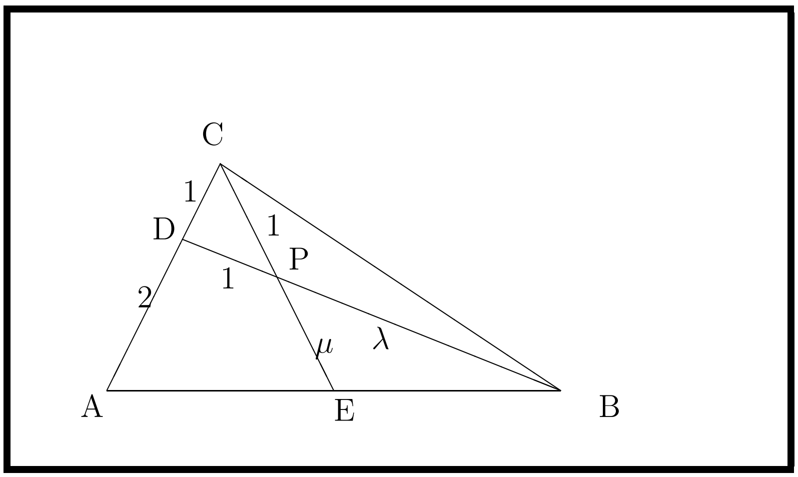
$$= \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\cos\,\alpha + \cos\,\beta}{2}$$

Solución — Control N°2
Versión C

3. En un triángulo ABC, llamamos E al punto medio de $\overline{AB}$ y D al punto de trisección de $\overline{AC}$ que está más cerca de C. Sea P el punto de intersección de $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$.

   Encuentre la razón λ en que P divide a $\overline{BD}$.

   Solución



Se tiene :

$$\vec{e} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\ ,\ \vec{d} = \frac{\vec{a}+2\,\vec{c}}{3}$$

$$\vec{p} = \frac{\lambda\vec{d}+\vec{b}}{1+\lambda}$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{e}+\mu\vec{c}}{1+\mu}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \vec{p} = & \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{\vec{a}+2\,\vec{c}}{3}\right)+\frac{1}{1+\lambda}\vec{b} \\ \vec{p} = & \frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)+\frac{\mu}{1+\mu}\vec{c} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{1+\lambda} = & \frac{1}{2(1+\mu)} \\ \frac{1}{1+\lambda} = & \frac{1}{2(1+\mu)} \\ \frac{2\lambda}{3(1+\lambda)} = & \frac{\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lambda = 3$$