MA-11A Algebra	**13 de Abril, 2000**

Pauta Control No. 1

PROBLEMA 1:

(i).- Llamemos t a la proposición $(\bar{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$. Luego sabemos del enunciado que s es verdadera y que $s \Rightarrow t$ es verdadera. De la tabla de verdad de la implicancia deducimos que t es verdadero. Como una conjunción es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas entonces $\bar{p} \Rightarrow q$ y $p \Rightarrow r$ son verdaderas. Analicemos los dos valores de verdad posibles de p. Si p es verdadera entonces r es verdadera (pues la implicancia $p \Rightarrow r$ es cierta sólo en este caso cuando sabemos que p es cierta). Concluimos que $q \vee r$ es verdadera (en este caso es cierto pues r es verdadera). En el caso que p es falsa entonces $\bar{p}$ es verdadera y deducimos que q es verdadera. De aquí $q \vee r$ es verdadera (pues q lo es). Con esto concluimos que siempre (independientemente del valor de verdad de p) $q \vee r$ es verdadera.

(ii).- Hay varias formas de hacer esta parte, veremos dos de ellas.

- **Primera Forma:** Observemos que $A \cup B \cup C = U$, por lo que $(A \cup B \cup C)\Delta C = C^c$. Además, $((A\Delta B)\Delta C)\,\Delta C = A\Delta B$. Luego,

$$
\begin{aligned}
A\Delta B = C^c = A \cup B \quad &\iff \quad (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cup B \\
&\iff \quad ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B) \\
&\iff \quad \emptyset = A \cap B\,.
\end{aligned}
$$

- **Segunda Forma:** Observemos que del enunciado se deduce que $A \cup B \cup C = U$. Vamos a desarrollar $(A\Delta B)\Delta C$:

$$
\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta C &= ((A \cup B) \setminus (A \cap B))\Delta C \\
&= (((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \setminus C) \cup (C \setminus ((A \cup B) \setminus (A \cap B))) \\
&= ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup C \\
&= (A \cap B)^c \\
&= (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}
$$

  donde usamos que C y $A \cup B$ son disjuntos. Luego si $A \cap B = \emptyset$ entonces $(A\Delta B)\Delta C = A \cup B \cup C$ y si $(A\Delta B)\Delta C = A \cup B \cup C = U$ es cierta entonces como $A \cap B$ es un subconjunto de $A \cup B \cup C$ necesariamente debe ser el conjunto vacío.

PROBLEMA 2:

(i).- Sea f una función de dominio A y recorrido $\mathbb{R}$. De la definición, $\hat{f}$ es una función de A en $\mathbb{R}$. Su evaluación es la siguiente: $\hat{f}(1) = f(2) - f(1), \hat{f}(2) = f(3) - f(2), \hat{f}(3) = f(0) - f(3), \hat{f}(0) = f(1) - f(0)$. Luego,

$$
\hat{f}(0) + \hat{f}(1) + \hat{f}(2) + \hat{f}(3) = f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + f(3) - f(2) + f(0) - f(3) = 0
$$

Lo que prueba que $\hat{f} \in I$.

(ii).- Sea $h \in I$ y supongamos $f \in D$ es tal que $\Delta(f) = h$. Es decir, de la definición de Δ:

$$f(1) - f(0) = h(0), f(2) - f(1) = h(1), f(3) - f(2) = h(2), f(0) - f(3) = h(3).$$

De aquí, despejando y usando que $f(0) = 0$ para funciones de D, deducimos que:

$$f(0) = 0, f(1) = h(0), f(2) = h(0) + h(1), f(3) = h(0) + h(1) + h(2)\,. \qquad (1)$$

Notar que como $h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = 0$ entonces la igualdad $f(0) - f(3) = h(3)$ es consistente con $f(0) = 0$ y f está bien definida. Luego dada $h \in I$ existe una única función $f \in D$ tal que $\Delta(f) = h$ que es aquella dada por la asignación en (1). Esto prueba directamente que Δ es biyectiva pues obtuvimos su inversa.

PROBLEMA 3:

(i).- $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ por propiedad vista en clases.

(ii).- Sea $y \in f(A) \cap f(B)$. Luego $y \in f(A)$ y $y \in f(B)$. Entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $f(a) = f(b) = y$. Pero f es inyectiva, luego $a = b$. Esto es una contradicción pues si $a = b$ entonces $a \in A \cap B$ que es vacío. Luego no hay elementos en $f(A) \cap f(B)$.

(iii).- Si f es sobreyectiva entonces por propiedad vista en clases se tiene que $f(U) = f(A \cup A^c) = f(A) \cup f(A^c) = U$.

Veamos el contraejemplo: sea $U = \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n/2$ en $n \in \mathbb{N}$ par, y $f(n) = n/2 + 1/2$ en $n \in \mathbb{N}$ impar. Claramente es una función sobreyectiva. Si tomamos A el conjunto de los pares vemos que $f(A) \cap f(A^c) \neq \emptyset$ pues $f(1) = f(2) = 1$ con $1 \in A$ y $2 \in A^c$.

(iv).- Veremos dos formas alternativas de hacer esta parte.

- **Primera Forma:** Como sabemos que cualquiera sea $C \subseteq U$, $C \subseteq f^{-1}(f(C))$, tenemos que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

  Para probar que $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$, procedemos por contradicción. Supongamos entonces que $a \in f^{-1}(f(A))$ y $a \notin A$. Por definición de $f^{-1}(A)$, sigue que existe un $y \in f(A)$ tal que $f(a) = y$. Luego, por definición de $f(A)$, existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$ y $f(a) = y$. Por lo tanto, existe un $x \in A$ tal que $f(x) = f(a)$. Luego, como $a \notin A$, existe un $x \in f^{-1}(f(A^c)) \cap A$. Lo que implica, por hipótesis, que $x \in A^c \cap A = \emptyset$, que es una contradicción.

- **Segunda Forma:** Como sabemos que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ entonces sólo hay que probar que $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$, o lo que es lo mismo que $f^{-1}(f(A)) \cap A^c = \emptyset$.

  Razonaremos por contradicción. Supongamos que existe $x \in f^{-1}(f(A)) \cap A^c$. Luego $x \in A^c$ y $x \in f^{-1}(f(A))$. De esto último deducimos que $f(x) \in f(A^c)$ y $f(x) \in f(A)$. Luego existe $a \in A$ tal que $f(x) = f(a)$ de lo que deducimos que $f(a) \in f(A^c)$ pues $f(x) \in f(A^c)$. Concluimos que $a \in f^{-1}(f(A^c)) = A^c$. Pero $a \in A$ que no se intersecta con A^c. Hemos llegado a una contradicción, luego $f^{-1}(f(A)) \cap A^c = \emptyset$.