1.0. Desigualdades e Inecuaciones

1. Demuestre que si $x, y \in \Re^+$,y $xy = 1$,entonces $x + y \geq 2$.

   Demostración.

   Tenemos que $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.*Por tanto* $x^2 + 1 \geq 2x$. *Reemplazando* $1 = xy$, *obtenemos* $x^2 + xy \geq 2x$.*Dividiendo por* y *obtenemos*,$x + y \geq 2$.

2. Demuestre que si $x, y, z \in \Re^+$,y $xyz = 1$,entonces $x + y + z \geq 3$.

   Demostración.

   Nos basta probar que $(x + y + z)^2 \geq 9$.*Por el ejercicio anterior tenemos que* :

$$\begin{aligned} xy + z &\geq 2 \leadsto 2xy \geq 4 - 2z \\ xz + y &\geq 2 \leadsto 2xz \geq 4 - 2y \\ yz + x &\geq 2 \leadsto 2yz \geq 4 - 2x \end{aligned}$$

   Además ,

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &\geq 2x \leadsto x^2 \geq 2x - 1 \\ 1 + y^2 &\geq 2y \leadsto y^2 \geq 2y - 1 \\ 1 + z^2 &\geq 2z \leadsto z^2 \geq 2z - 1 \end{aligned}$$

   Por tanto:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \geq 2x - 1 + 2y - 1 + 2z - 1 + 4 - 2z + 4 - 2y + 4 - 2x.$$

3. Demuestre que la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$,con $x \in (1, \infty)$ es monótona creciente.

   Demostración.

   Consideremos x_1 y x_2 en $(1, \infty)$ y $x_1 < x_2$. La diferencia,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_1 x_2^2 + x_1 - x_1^2 x_2 - x_2}{x_1 x_2}$$

$$\frac{x_1 x_2 (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 x_2 - 1)(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$$

   es mayor que cero ,ya que $x_1 x_2 > 1; x_1 < x_2$.