CAPITULO 2

Aritmética Natural

1. Contenidos

- Introducción¹
- Sumatorias
- Inducción Matemática
- Progresiones
- Teorema del Binomio

2. Introducción

- (1) Asumiremos que el conjunto de números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado completo .

Después de esa suposición podemos garantizar la existencia del neutro aditivo "0" y el neutro multiplicativo "1" en $\mathbb{R}$. Así que podemos sumar estos elementos a voluntad, es decir:

$$(47) \quad \{0, 0 + 1, 0 + 1 + 1, 0 + 1 + 1 + 1, \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}$$

La idea más básica posible, para definir el conjunto de números naturales es motivada por (47), en esa dirección hacemos.

Definición 2.0.5. *Diremos que un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ será llamado " Conjunto Inductivo " si:*

- $1 \in I$
- $k \in I \implies k + 1 \in I$

Ejemplo 2.0.6.

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ son conjuntos inductivos.
- $\mathbb{R} - \{10\}$ no es conjunto inductivo.

Lema 2.0.7.

Si A y B son conjuntos inductivos entonces $A \cap B$ es un conjunto inductivo

En efecto

¹Para profundizar lo dicho en este capitulo les sugiero ver [2], Mi Profesor y Amigo Q.E.D.

- Por demostrar que (p.d.q.):

$$- 1 \in A \cap B$$

$$- k \in A \cap B \implies (k+1) \in A \cap B$$

- Información (datos, input):

$$- A \text{ inductivo} \implies \begin{cases} 1 \in A \\ k \in A \implies (k+1) \in A \end{cases}$$

$$- B \text{ inductivo} \implies \begin{cases} 1 \in B \\ k \in B \implies (k+1) \in B \end{cases}$$

- Demostración propiamente tal:

Como, $A \cap B = \{u \mid u \in A \wedge u \in B\}$ entonces del item Información, sigue que:

$$- 1 \in A \wedge 1 \in B \implies 1 \in A \cap B$$

$$- k \in A \cap B \implies k \in A \wedge k \in B \implies (k+1) \in A \wedge (k+1) \in B \implies (k+1) \in A \cap B$$

- Lo que demuestra que $A \cap B$ es un conjunto inductivo.

Definición 2.0.8.

Llamaremos conjunto de números naturales, $\mathbb{N}$ a la intersección de todos los conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, es decir.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \cap \{I \mid I \subset \mathbb{R}, I \text{ inductivo}\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, \dots\} \end{aligned}$$

- (2) Llamaremos una sucesión de números reales a una "regla que pone en correspondencia de manera única los elementos de $\mathbb{N}$ con números reales". En los capítulos siguientes nos referiremos latamente a este tipo de reglas las cuales las agruparemos bajo el concepto de relación. Por el momento notaremos a las sucesiones como sigue:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = f_n \end{aligned}$$

Ejemplo 2.0.9.

- (a) Si $f_n = n + 1$ entonces los posibles valores de esta sucesión son del tipo:

$$\text{Img}(f) = \{2, 3, 4, 5, \dots\} \text{ donde } \text{Img} \text{ significa imagen de la sucesión}$$

- (b) Si $a_n = \frac{1}{n}$ entonces los posibles valores de la sucesión son:

$$\text{Img}(a) = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

(c) *Adoptaremos la notación:*

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \vee \quad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \text{Img}(f)$$

3. Inducción

3.1. Objetivos.

Que el Estudiante:

- (1) Se familiarice con el uso del Símbolo de Sumatoria.
- (2) Comprenda que en esta primera instancia el Símbolo de Sumatoria, aparece como una opción que permite simplificar la escritura de grandes volúmenes de datos, para facilitar la propia comprensión de estos.
- (3) Use el Método de Inducción para verificar propiedades algebraicas.
- (4) En forma natural observe que el símbolo de Sumatoria junto al Método de Inducción se constituyen en una herramienta eficaz, que permite manipular de manera eficiente situaciones de una mayor complejidad

Esta sección estará basada en los siguientes principios básicos:

Teorema 3.1.1. Principio de Inducción.

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $F(k)$ una fórmula proposicional, es decir $F(k)$ puede ser verdadera o falsa en k , (sólo una de ambas) y supongamos que F satisface las propiedades:

- $F(1)$ es verdadera
- $F(k)$ verdadera implica que $F(k + 1)$ es verdadera, para cada $k \in \mathbb{N}$ entonces

$F(k)$ es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$

En efecto

- p.d.q. $F(k)$ es verdadera ($\forall k; k \in \mathbb{N}$)
- Datos
 - $F(1)$ es verdadera
 - $k \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad F(k) \text{ verdadera} \implies F(k + 1) \text{ verdadera}$

- Demostración propiamente tal:

(1) Basta mostrar que el conjunto

$$(48) \quad I = \{k \in \mathbb{R} \mid F(k) \text{ es verdadera} \}$$

Es inductivo.

¿ Por qué ?

Por lo siguiente:

$$- \mathbb{N} = \cap \{I : I \subset \mathbb{R}, I \text{ inductivo} \} \implies \mathbb{N} \subset I \quad (\forall I; I \text{ inductivo})$$

- Luego si vale para (48) entonces vale para $\mathbb{N}$

(2) Manos a la obra:

De los datos sigue que:

(a) $1 \in I$ ($F(1)$ es verdadera)

(b) Si $K \in I$ entonces $F(k)$ es verdadera y luego $F(k + 1)$ es verdadera, es decir $(k + 1) \in I$.

- Finalmente I es inductivo y $F(k)$ es verdadera ($\forall k; k \in \mathbb{N}$)

Teorema 3.1.2. Teorema de Recurrencia

Sea $x \in \mathbb{R}$ y g una función definida sobre $\mathbb{R}$ y con valores reales entonces existe una única sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

- $a_1 = x$
- Para cada n , $a_{n+1} = g(a_n)$

Ejemplo 3.1.3.

(1) *Construcción de potencias.*

Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario y define la función real a valores reales, $g(r) = r \cdot x$, ($\forall r; r \in \mathbb{R}$) entonces existe una única función a tal que:

(a) $a(1) = x$

(b) $a(n + 1) = g(a(n)) = a(n) \cdot x$

(c) Así tenemos

$$\begin{aligned}
a(1) &= x \\
a(2) &= a(1+1) = g(a(1)) = a(1) \cdot x = x \cdot x = x^2 \\
a(3) &= a(2+1) = g(a(2)) = a(2) \cdot x = x^2 \cdot x = x^3 \\
a(4) &= a(3+1) = g(a(3)) = a(3) \cdot x = x^3 \cdot x = x^4 \\
&\vdots \\
a(n+1) &= a(n+1) = g(a(n)) = a(n) \cdot x = x^n \cdot x = x^{n+1}
\end{aligned}$$

Definición 3.1.4. *Potencias de un real*

Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos $x^1 = x$ y $x^{n+1} = x^n \cdot x$

(2) *Costrucción de factoriales.*

$$\begin{aligned}
1! &= 1 \\
(n+1)! &= n! \cdot (n+1)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
2! &= 1 \cdot 2 \\
3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \\
4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
&\vdots \\
n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n
\end{aligned}$$

Definición 3.1.5. *Factoriales*

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n!$, se llama n -factorial.

(3) *Costrucción de sumatorias*

Dada una sucesión de números reales $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, podemos construir una nueva sucesión usando recurrencia, como sigue:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad s_1 &= a_1 = \sum_{i=1}^1 a_i \\
\text{(b)} \quad s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i + a_{n+1}
\end{aligned}$$

Luego, tenemos la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Definición 3.1.6. Dada una sucesión de números reales $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, entonces

$$(49) \quad s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Se llama la sumatoria de los primeros n -números de la sucesión $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$

(4) *Construcción de Progresiones aritméticas*

Dado $x \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R}$ define por recurrencia la sucesión:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n + d; \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Definición 3.1.7. $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$, será llamada una *Progresión Aritmética de diferencia d* si

$$(50) \quad a_{n+1} = a_n + d; \quad n \in \mathbb{N}$$

(5) *Construcción de Progresiones geométricas*

Dado $x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}$ define por recurrencia la sucesión:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n \cdot r \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Definición 3.1.8. $G = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$, será llamada una *Progresión Geométrica de razón $r \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$* si

$$(51) \quad a_{n+1} = a_n \cdot r \quad (n \in \mathbb{N})$$

(6) *Construcción de matrices:*(a) *Matriz fila o columna (ciclo de largo n)*

Consideramos una sucesión $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ entonces podemos construir una fila o columna como sigue:

Para una fila tenemos.

- $a_{1j} = a_j$, para $j = 1, 2, 3, \dots, n$,
- $F := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ o

Para una columna tenemos:

- $a_{i1} = a_i$, par $i = 1, 2, 3, \dots, n$

- $C := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$

(b) *En realidad esta implícito el concepto de sucesión doble " a_{ij} ", sin embargo podemos hacer la siguiente construcción:*

Dados $n \cdot m$ elementos en $\mathbb{R}$, los ordenamos por como sigue:

(1) a_{ij} para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ y $j = 1, 2, 3, \dots, m$

(2) Para $i = 1$:

(3) Si $\begin{cases} j = 1, 2, 3, \dots, m \text{ copia } a_{ij} \\ \text{caso contrario vaya a (4)} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \text{si } i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ hacer } i = i + 1 \text{ e ir a (3)} \\ \text{caso contrario} \quad \text{fin} \end{cases}$

Luego, lo que conseguimos es lo siguiente:

$$(52) \quad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Definición 3.1.9. Una expresión del tipo (52), será llamada una matriz real de n -filas y m -columnas (orden $n \times m$)

El conjunto de matrices lo notaremos como sigue:

$$(53) \quad \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) = \{ \text{matrices de orden } n \times m \}$$

3.2. Propiedades de las sumatorias.

Si $(a_i)_{(1 \leq i \leq n)}$ y $(b_i)_{(1 \leq i \leq n)}$ son dos sucesiones reales entonces:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

En efecto

- p.d.q. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

- Datos:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ - \sum_{i=1}^n b_i &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \end{aligned}$$

$$- \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \cdots + a_n + b_n$$

• Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \cdots + a_n + b_n \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

(2) Si $c \in \mathbb{R}$ entonces $\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$

En efecto

- p.d.q. : $\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$
- Datos : $\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \cdots + c \cdot a_n$

• Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c \cdot a_i &= c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \cdots + c \cdot a_n \\ &= c \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= c \cdot \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

(3) $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^s a_i + \sum_{i=s+1}^n a_i \quad 1 \leq s \leq n$

En efecto

- p.d.q. $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^s a_i + \sum_{i=s+1}^n a_i$
- Datos : $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

- Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_s + a_{s+1} + \cdots + a_n \\ &= \sum_{i=1}^s a_i + \sum_{i=s+1}^n a_i\end{aligned}$$

$$(4) \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1} \quad (\text{Propiedad Telescópica})$$

$$(5) \sum_{i=s}^r a_i = \sum_{i=s+t}^{r+t} a_{i-t} \quad (\text{Propiedad del reloj})$$

Ambas se las dejo como ejercicio.

3.3. Ejercicios Resueltos de Sumatorias.

- (1) Calcule la siguiente sumatoria :

$$(54) \quad S = \sum_{j=1}^{100} 3$$

Solución

- (i) Por definición de sumatoria sabemos que

$$(55) \quad \sum_{i=1}^{100} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}$$

- (ii) El punto (55), motiva definir, la siguiente fórmula:

$$(56) \quad a_i = 3 \text{ para } i=1,2,3,\dots,100 ; \text{este es el rango de variación de } i$$

Es decir,

$$\begin{aligned}a_1 &= 3 \\ a_2 &= 3 \\ &\vdots \\ a_{100} &= 3\end{aligned}$$

(iii) Finalmente, aplicando (55) y (56) en (54) tenemos:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^{100} 3 \\
 &= \sum_{i=1}^{100} a_i && \text{ver (56)} \\
 &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} && \text{ver (55)} \\
 &= 3 + 3 + \cdots + 3 \quad (100 - \text{ veces}) \\
 &= 300
 \end{aligned}$$

La primera conclusión que se puede obtener de (54), es que podemos cambiar o substituir el número 3 o mejor la constante 3, por cualquier otra constante c , lo mismo que el natural 100, puede ser cambiado por un natural $n \in \mathbb{N}$. Así por ejemplo:

– Para $c = 1$ y $n \in \mathbb{N}$

$$(57) \quad \sum_{i=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 \cdots + 1}_{(n \text{ veces})} = 1 \cdot n = n$$

– En general, para $c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$(58) \quad \sum_{i=1}^n c = c \cdot n$$

(2) Calcule la siguiente sumatoria

$$(59) \quad S = \sum_{i=1}^9 (2 + 3i)$$

Solución

(i) Por definición de sumatoria sabemos que

$$(60) \quad \sum_{i=1}^9 a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$$

(ii) El punto (60), motiva definir, la siguiente fórmula:

$$(61) \quad a_i = (2 + 3i) \quad \text{para } i=1,2,3,\dots,9 \text{ ; este es el rango de variación de } i$$

Es decir,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 + 3 \cdot 1 \\ a_2 &= 2 + 3 \cdot 2 \\ &\vdots \\ a_9 &= 2 + 3 \cdot 9 \end{aligned}$$

y
(iii) Finalmente, aplicando (60) y (61) en (59) tenemos:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^9 (2 + 3i) \\ &= \sum_{i=1}^9 a_i && \text{ver(61)} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 && \text{ver(60)} \\ &= (2 + 3 \cdot 1) + (2 + 3 \cdot 2) + \cdots + (2 + 3 \cdot 9) \\ &= 18 + 3 \cdot 45 \\ &= 153 \end{aligned}$$

Si observamos la solución del problema anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^9 (2 + 3i) \\ &= \sum_{i=1}^9 a_i \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 \\ &= (2 + 3 \cdot 1) + (2 + 3 \cdot 2) + \cdots + (2 + 3 \cdot 9) \\ &= \underbrace{2 + 2 + 2 + \cdots + 2}_{9 \text{ - veces}} + 3 \cdot (1 + 2 + 3 \cdot +9) \\ &= \sum_{i=1}^9 2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^9 i \\ &= 2 \cdot 9 + 3 \cdot 45 \end{aligned}$$

Así que, usando la definición de sumatoria es posible resolver los problemas, pero usando sus propiedades se ocupa menor tiempo.

(3) Supongamos verdaderas en $\mathbb{N}$, las siguientes fórmulas:

(1) " Suma de los primeros n-números naturales "

$$(62) \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) " Suma de los primeros n-cuadrados de naturales "

$$(63) \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) " Suma de los primeros n-cubos de naturales "

$$(64) \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

(i) Calcule

$$(65) \quad S = \sum_{i=8}^{100} i$$

Solución

$$\sum_{i=1}^{100} i = \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + 7}_{\sum_{i=1}^7} + (8 + 9 + 10 + \dots + 100)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^7 i &= (8 + 9 + 10 + \dots + 100) \\ &= \sum_{i=8}^{100} i \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^7 i \\ &= \frac{100(100+1)}{2} - \frac{7(7+1)}{2} \\ &= 50 \cdot 101 - 7 \cdot 4 \\ &= 5050 - 28 \\ &= 5022 \end{aligned}$$

Conclusión:

$$(66) \quad \sum_{i=m}^n i = \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^{m-1} i \quad \text{para } m < n$$

(ii) Calcule

$$(67) \quad S = \sum_{i=12}^{20} (i^3 - 5i^2 + 3i - 4)$$

Solución

$$\begin{aligned} \sum_{i=12}^{20} (i^3 - 5i^2 + 3i - 4) &= \sum_{i=12}^{20} i^3 - 5 \sum_{i=12}^{20} i^2 + 3 \sum_{i=12}^{20} i - 4 \sum_{i=12}^{20} 1 \\ &= \left[\sum_{i=1}^{20} i^3 - \sum_{i=1}^{11} i^3 \right] - 5 \left[\sum_{i=1}^{20} i^2 - \sum_{i=1}^{11} i^2 \right] + \\ &\quad 3 \left[\sum_{i=1}^{20} i - \sum_{i=1}^{11} i \right] - 4 \left[\sum_{i=1}^{20} 1 - \sum_{i=1}^{11} 1 \right] \\ &= \left[\frac{20 \cdot 21}{2} \right]^2 - \left[\frac{11 \cdot 12}{2} \right]^2 - 5 \left[\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} \right] + \\ &\quad 5 \left[\frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} \right] + 3 \left[\frac{20 \cdot 21}{2} \right] - 3 \left[\frac{11 \cdot 12}{2} \right] - \\ &\quad 4 [20 - 11] \\ &= 28320 \end{aligned}$$

(4) Demuestre que

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= (n-0) + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-(n-2)) + (n-(n-1)) \\ &= (n+1-1) + (n+1-2) + (n+1-3) + \cdots + (n+1-(n-1)) + (n+1-n) \\ &= \underbrace{n+1}_{\text{n-veces}} - (1+2+3+\cdots+n) \\ &= n(n+1) - \sum_{i=1}^n i \end{aligned}$$

Así que,

$$2 \sum_{i=1}^n i = n(n+1)$$

Y luego,

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Alternativa

$$(68) \quad \sum_{i=1}^n (i+1)^2 - i^2 = (n+1)^2 - 1 \quad (\text{Propiedad telescópica})$$

Pero,

$$(69) \quad \sum_{i=1}^n (i+1)^2 - i^2 = \sum_{i=1}^n (2i+1) \quad (\text{suma por su diferencia !})$$

Igualando términos en (68) y (69), tenemos que;

$$2 \sum_{i=1}^n i + n = (n+1)^2 - 1 \implies \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Podemos usar directamente esta propiedad para calcular:

$$S = \sum_{i=1}^n (i-1)$$

En efecto

Alternativa 1:

Sea $u = i - 1$ entonces $i = 1, 2, \dots, n \implies u = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$, así que:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{u=0}^{n-1} u \\ &= \sum_{u=1}^{n-1} u \\ &= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

Alternativa 2:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n (i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= \frac{n^2+n-2n}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

(5) Demuestre que

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad a \neq 1 \wedge a \neq 0 \quad (*)$$

Solución:

$$\begin{aligned} (a - 1) \sum_{i=0}^n a^i &= \sum_{i=0}^n a^{i+1} - \sum_{i=0}^n a^i \\ &= (a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n + a^{n+1}) - (1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n) \\ &= a^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Luego, despejando tenemos que

$$(70) \quad \sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Ahora use $(\star)$, para calcular

$$S = \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Solución:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^i \end{aligned}$$

Aplicando directamente $(\star)$ para $a = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\left[\frac{1}{2}\right]^{100} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\left[\frac{1}{2}\right]^{100} - 1}{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \end{aligned}$$

3.4. Ejercicios Propuestos de Sumatorias.

(1) Calcule $\sum_{i=1}^5 3(i^2 - 1)$

(2) Calcule:

- $\sum_{i=10}^{25} i$
- $\sum_{i=10}^{25} u$
- $\sum_{i=4}^{12} i^3$

(3) Calcule la sumatoria:

$$S = \sum_{i=10}^{40} i(i+1)^2$$

(4) Si

$$a_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^k & : 1 \leq k < 100 \\ (k+1)^2 & : 100 \leq k \leq 200 \end{cases}$$

entonces calcule la sumatoria

$$S = \sum_{k=1}^{200} a_k$$

(5) Demuestre que

$$\sum_{i=1}^n (3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

3.5. Ejercicios Resueltos de Inducción.

(1) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional.

$$F(n) : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}. \text{ Es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución

(i) **Verificamos que $F(1)$ es verdadera.**

Por una parte $\sum_{i=1}^1 i = 1$ y por otra $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Así que

$$(71) \quad \sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2}$$

Luego, de (71) sigue que $F(1)$ es verdadera

(ii) **Hipótesis de Inducción.**

$F(k)$, es verdadera. Es decir,

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \quad (H)$$

(iii) **Tesis de Inducción.**

Por demostrar que (p.d.q) $F(k+1)$, es verdadera. Es decir p.d.q.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^k i + \sum_{i=k+1}^{k+1} i \\ &\stackrel{(H)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Luego, $F(k+1)$, es verdadera y $F(n)$ es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

(2) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional.

$$F(n) : \sum_{i=1}^n i2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n. \text{ Es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $F(1)$ es verdadera.

Por una parte;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 i2^{i-1} &= 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por otra parte;

$$\begin{aligned} 1 + (1-1)2^1 &= 1 + 0 \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así que,

$$\sum_{i=1}^1 i2^{i-1} = 1 + (1-1)2^1$$

Luego, $F(1)$ es verdadera

Etapa 2. Hipótesis de Inducción

$F(k)$ es verdadera.

Esto es.

$$\sum_{i=1}^k i2^{i-1} = 1 + (k-1)2^k \quad (H)$$

es verdadera.

Etapa 3. Tesis de Inducción

Por demostrar que $F(k+1)$ es verdadera

e.e p.d.q.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i2^{i-1} = 1 + k2^{k+1}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i2^{i-1} &= \sum_{i=1}^k i2^{i-1} + (k+1)2^k \\ &\stackrel{(H)}{=} 1 + (k-1)2^k + (k+1)2^k \\ &= 1 + 2k2^k \\ &= 1 + k2^{k+1} \end{aligned}$$

Luego, $F(k+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

(3) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional.

$F(n)$: $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9. Es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

Solución

(i) **Verificamos que $F(1)$ es verdadera.**

$$\begin{aligned} 10^1 + 3 \cdot 4^{1+2} + 5 &= 10 + 3 \cdot 64 + 5 \\ &= 10 + 192 + 5 \\ &= 207 \\ &= 9 \cdot 23 \end{aligned}$$

Así que, $F(1)$ es verdadera.

(ii) **Hipótesis de Inducción.**

$F(k)$, es verdadera. Es decir, existe un elemento numérico que depende de la posición k , diágonos $q(k)$ tal que:

$$10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 = 9 \cdot q(k) \quad (H)$$

(iii) **Tesis de Inducción.**

Por demostrar que (p.d.q) $F(k+1)$, es verdadera. Es decir p.d.q. existe $q(k+1)$ tal que

$$10^{k+1} + 3 \cdot 4^{(k+1)+2} + 5 = 9 \cdot q(k+1)$$

En efecto

La "filosofía" que se puede emplear para resolver este tipo de problemas es la siguiente:

- (1) Hacemos la división entre $10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5$ y $10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5$. Es decir

$$\begin{array}{r} 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 \quad : \quad 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 = 10 \\ (-) \\ \hline 10^{k+1} + 30 \cdot 4^{k+2} + 50 \\ \hline -18 \cdot 4^{k+2} - 45 \end{array}$$

- (2) Luego, aplicando la definición de división tenemos:

$$\begin{aligned} 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 &= 10[10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5] + [-18 \cdot 4^{k+2} - 45] \\ &\stackrel{(H)}{=} 10[9 \cdot q(k)] + 9[-2 \cdot 4^{k+2} - 5] \\ &= 9[10 \cdot q(k)] + 9[-2 \cdot 4^{k+2} - 5] \\ &= 9([10 \cdot q(k)] + [-2 \cdot 4^{k+2} - 5]) \\ &= 9 \underbrace{(10 \cdot q(k) - 2 \cdot 4^{k+2} - 5)}_{q(k+1)} \\ &= 9 \cdot q(k+1) \end{aligned}$$

Luego, $F(k+1)$, es verdadera y $F(n)$ es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

3.6. Ejercicios Propuestos de Inducción.

Demuestre usando Inducción matemática que son verdaderas ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} (1) \quad F(n) : \quad &\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ (2) \quad F(n) : \quad &\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

- (3) $F(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i+1)(2i-1)} = \frac{n}{2n+1}$
- (4) $F(n) : \sum_{i=1}^n (3i-1) = \frac{n}{2}(3n+1)$
- (5) $F(n) : \sum_{i=1}^n 3^{i-1} = \frac{3^n-1}{2}$
- (6) $F(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
- (7) $F(n) : \sum_{i=1}^n i2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$
- (8) $F(n) : \sum_{i=1}^n (3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$
- (9) $F(n) : 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
- (10) $F(n) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- (11) $F(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- (12) $F(n) : 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1)(2n) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$
- (13) $F(n) : 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
- (14) $F(n) : x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $(x - y)$
- (15) $F(n) : x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $(x + y)$
- (16) $F(n) : n^3 + 2n$ es divisible por 3
- (17) $F(n) : 2^n + (-1)^{n+1}$ es divisible por 3
- (18) $F(n) : 10^n + 3 \cdot 4^{n+1} + 5$ es divisible por 9
- (19) $F(n) : 5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13
- (20) $F(n) : 7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64
- (21) $F(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$, si $x \geq -1$

4. Progresiones

4.1. Objetivos.

Que el Estudiante:

- (1) Este en condiciones de verificar que un conjunto de números satisface las propiedades que definen a una progresión aritmética o geométrica.
- (2) En forma natural observe que el ordenamiento de los elementos de un conjunto en progresión permite obtener rápida y eficientemente por ejemplo: cada término en forma independiente o determinar la suma de sus elementos en cualquier instante.

4.2. Propiedades de las progresiones aritméticas.

- (1) Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$, es una Progresión Aritmética de diferencia d entonces

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot d; \quad n \in \mathbb{N}$$

En efecto

- p.d.q. $a_{n+1} = a_1 + n \cdot d; \quad n \in \mathbb{N}$

- Datos

Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$, una Progresión Aritmética de diferencia d entonces de (50) tenemos que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Luego, el método sugerido es Inducción, para probar que la fórmula $F(s): \quad a_{n+1} = a_1 + n \cdot d; \quad n \in \mathbb{N}$, es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$). Así que:

– p.d.q. $F(1)$ es verdadera.

$$a_{1+1} = a_2 = a_1 + d.$$

Así que $F(1)$ es verdadera

– Hipótesis de Inducción:

Suponemos que $F(k)$ es verdadera, es decir

$$a_k = a_1 + (k - 1)d \quad (H)$$

– Tesis de Inducción:

p.d.q. $F(k+1)$ es verdadera

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + d \\ &\stackrel{(H)}{=} a_1 + (k - 1)d + d \\ &= a_1 + kd \end{aligned}$$

– Así $F(k+1)$ es verdadera.

- Luego,

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot d \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

- (2) Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$, es una Progresión Aritmética de diferencia d entonces la suma de los n -primeros términos se obtiene de la fórmula.

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = \begin{cases} \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) & (\forall n; n \in \mathbb{N}) \\ \vee \\ \frac{n}{2}(a_1 + a_n) & (\forall n; n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

En efecto

- p.d.q. $\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

- Datos

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- Demostración, hacemos inducción para concluir que la fórmula es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$:

$$F(n): \quad \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

- p.d.q. $F(1)$ es verdadera

Por una parte:

$$\sum_{i=1}^1 a_i = a_1 \text{ y por otra parte; } \frac{1}{2}(2a_1 + (1-1)d) = \frac{1}{2} \cdot 2a_1 = a_1, \text{ así que } F(1) \text{ es verdadera.}$$

- Hipótesis de inducción:

suponemos que $F(k)$ es verdadera, es decir:

$$\sum_{i=1}^k a_i = \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) \quad (H)$$

- Tesis de inducción: p.d.q. $F(k+1)$ es verdadera.

En efecto

$$\begin{aligned}
s_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i \\
&= \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} \\
&\stackrel{(H)}{=} \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) + a_{k+1} \\
&= \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) + (a_1 + kd) \\
&= \frac{2ka_1 + k^2d - kd + 2a_1 + 2kd}{2} \\
&= \frac{2a_1(k+1) + k(k+1)d}{2} \\
&= \frac{(k+1)}{2}[2a_1 + kd]
\end{aligned}$$

– Así, $F(k+1)$ es verdadera.

Luego,

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

En particular, como $a_1 + (n-1)d = a_n$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_i &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + [a_1 + (n-1)d]) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)
\end{aligned}$$

- (3) En particular, como aplicación inmediata tenemos que la suma de los n -primeros naturales es:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n i &= \frac{n}{2}(1 + (n-1) \cdot 1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

4.3. Propiedades de las progresiones geométricas.

- (1) Si $G = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$, es una Progresión Geométrica de razón r entonces:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot r^n \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

- (2) $s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \left[\frac{r^n - 1}{r - 1} \right] \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

Las demostraciones son ejercicios.

4.4. Ejercicios Resueltos de Progresión Aritmética.

- (1) La suma de tres números en progresión aritmética (p.a) es 27 y la suma de sus cuadrados es 293. Determine tales números.

Solución

Una estrategia para resolver este tipo de problemas puede seguir la siguiente rutina:

- **Resolvemos el problema en abstracto, es decir, suponemos que los números x, y, z son la solución del problema.**

Ahora matematizamos el problema, sea

$$(72) \quad A = \{x, y, z\}$$

el conjunto que posee los números pedidos

- " Obligamos al conjunto A ", que satisfaga las propiedades del problema:
 - A es una p.a. si y sólo si existe $d \in \mathbb{R}$, tal que $y = x + d$ y $z = x + 2d$. Así sustituyendo en (72) tenemos

$$(73) \quad A = \{y - d, y, y + d\}$$

– Sabemos que $x + y + z = 27$ y entonces:

$$(74) \quad \begin{aligned} y - d + y + y + d &= 27 \\ 3y &= 27 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

– Sustituyendo el valor de y obtenido en (74) en (73), tenemos

$$(75) \quad A = \{9 - d, 9, 9 + d\}$$

– Sabemos que $x^2 + y^2 + z^2 = 293$ y entonces:

$$(76) \quad \begin{aligned} (9 - d)^2 + 9^2 + (9 + d)^2 &= 293 \\ d^2 &= 25 \\ d &= \pm 5 \end{aligned}$$

- Chequeamos la solución obtenida: Sustituyendo el valor de d obtenido en (76) en (75), obtenemos:

Caso 1. $d = 5$

$$A = \{9 - 5, 9, 9 + 5\} = \{4, 9, 14\}$$

Caso 2. $d = -5$

$$A = \{9 - (-5), 9, 9 + (-5)\} = \{14, 9, 4\}$$

- (2) Si en una p.a. el quinto término es 15 y el décimo es 30 entonces determine la p.a.

Solución

- Sea

$$(77) \quad A = \{a_1, a_2, a_3 \dots\}$$

la p.a. pedida.

- Si A en (77) es la p.a. pedida entonces los a_i , verifican la siguiente propiedad genérica:

$$(78) \quad a_{i+1} = a_1 + i \cdot d \quad (\forall i; i \geq 1)$$

- En particular, $a_5 = a_1 + 4d$ y $a_{10} = a_1 + 9d$. Así que matematizando el problema tenemos:

$$(79) \quad \left. \begin{array}{l} a_1 + 4d = 15 \\ a_1 + 9d = 30 \end{array} \right\} \implies d = 3 \quad \wedge \quad a_1 = 3$$

- Sustituyendo los resultados obtenidos en (79) en (77), obtenemos:

$$A = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$$

- (3) La suma de tres números en progresión geométrica (p.g) es 26 y su producto es 216. Determine tales números.

Solución

- (i) Sea

$$(80) \quad G = \{x, y, z\}$$

el conjunto que posee los números pedidos

- (ii) " Obligamos al conjunto G ", que satisfaga las propiedades del problema:

- G es una p.g. si y sólo si existe $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ y $r \neq 1$ tal que $y = x \cdot r$ y $z = x \cdot 2r$. Así sustituyendo en (80) tenemos

$$(81) \quad G = \left\{ \frac{y}{r}, y, y \cdot r \right\}$$

- Sabemos que $x \cdot y \cdot z = 216$ y entonces:

$$(82) \quad \begin{array}{rcl} \frac{y}{r} \cdot y \cdot (y \cdot r) & = & 216 \\ y^3 & = & 216 \\ y & = & 6 \end{array}$$

- Sustituyendo el valor de y obtenido en (82) en (81), tenemos

$$(83) \quad G = \left\{ \frac{6}{r}, 6, 6 \cdot r \right\}$$

- Sabemos que $x + y + z = 26$ y entonces:

$$\begin{aligned}
 \frac{6}{r} + 6 + 6 \cdot r &= 26 \\
 6 + 6r + 6r^2 &= 26r \\
 (84) \quad 3r^2 - 10r + 3 &= 0
 \end{aligned}$$

$$r = 3 \quad \vee \quad r = \frac{1}{3}$$

(iii) Chequeamos la solución obtenida: Sustituyendo el valor de d obtenido en (84) en (83), obtenemos:

Caso 1. $r = 3$

$$A = \{2, 6, 18\}$$

Caso 2. $d = \frac{1}{3}$

$$A = \{18, 6, 2\}$$

(4) La suma de tres números en p.a. es 30. Si al primero de ellos se le agrega 1, al segundo 5 y al tercero 29 se obtiene una p.g. Determine ambas progresiones.

Solución

• Sean

$$(85) \quad A = \{x, y, z\}$$

$$(86) \quad G = \{x + 1, y + 5, z + 29\}$$

La p.a. y p.g. pedidas respectivamente.

• Según los datos la matemática involucrada es la siguiente:

– A es una p.a. si y sólo si existe $d \in \mathbb{R}$, tal que $y = x + d$ y $z = x + 2d$. Así sustituyendo en (85) y (86) tenemos

$$(87) \quad A = \{y - d, y, y + d\}$$

y

$$(88) \quad G = \{y - d + 1, y + 5, y + d + 29\}$$

– Sabemos que $x + y + z = 30$ y entonces:

$$\begin{aligned}
 (89) \quad y - d + y + y + d &= 30 \\
 3y &= 30 \\
 y &= 10
 \end{aligned}$$

– Sustituyendo el valor de y obtenido en (89) en (87) y , (88)tenemos

$$(90) \quad A = \{10 - d, 10, 10 + d\}$$

y

$$(91) \quad G = \{11 - d, 15, 39 + d\}$$

– Sabemos que G es una p.g. si y sólo si

$$(92) \quad \frac{15}{(11 - d)} = \frac{(39 + d)}{15}$$

De (92) obtenemos

$$(93) \quad \begin{aligned} (39 + d)(11 - d) &= 225 \\ 429 - 28d - d^2 &= 225 \\ d^2 + 28d - 204 &= 0 \\ d = 6 \quad \vee \quad d = -34 \end{aligned}$$

- Chequeamos la solución obtenida: Sustituyendo el valor de d obtenido en (93) en (90) y (91) obtenemos:

Caso 1. $d = 6$

$$(94) \quad A = \{4, 10, 116\} \quad \wedge \quad G = \{5, 15, 45\}$$

Caso 2. $d = -34$

$$(95) \quad A = \{44, 10, -24\} \quad \wedge \quad G = \{45, 15, 5\}$$

(5) Considere las progresiones:

$$\begin{aligned} G &= \{g_1, g_2, g_3, \dots\} && \text{progresión geométrica} \\ A &= \{3, a_2, a_3, \dots\} && \text{progresión aritmética} \end{aligned}$$

tal que

- $g_3 = 12$ y $g_7 = 192$

- $\sum_{i=1}^{11} g_i = \sum_{i=1}^{50} a_i$

Determine la diferencia de la progresión A

Solución

Etapa 1 : Salida

Sea d la diferencia de la progresión aritmética $A = \{3, a_2, a_3, \dots\}$

Etapa 2 : Datos

(i) Si G es una progresión geométrica entonces

$$\begin{aligned} g_3 = 12 \wedge g_7 = 192 &\iff \left. \begin{array}{l} g_1 \cdot r^2 = 12 \\ g_1 \cdot r^6 = 192 \end{array} \right\} \\ &\iff r^4 = \frac{192}{12} \\ &\iff r^4 = 16 \\ &\iff r = 2 \quad \wedge \quad g_1 = 3 \quad (*) \end{aligned}$$

(ii) Aplicando (*) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{11} g_i = \sum_{i=1}^{50} a_i &\iff 3(2^{11} - 1) = \frac{50}{2}(6 + 49d) \\ &\iff 6141 = 150 + 1225d \\ &\iff 1225d = 5991 \\ &\iff d = \frac{5991}{1225} \end{aligned}$$

4.5. Ejercicios Propuestos de Progresiones Geométricas.

(1) Calcule la suma de 101 términos de la progresión

$$A = \left\{ \frac{12}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}, \dots \right\}$$

(2) Intercale 24 medios aritméticos entre 10 y 30

(3) Intercale $n + 1$ medios aritméticos entre $-x^2$ y x^2

(4) ¿ Cuántos términos de la progresión $A = \{3, -1, -5, \dots\}$, se precisan para obtener una suma igual a -15750 ?

(5) La suma de n términos de una p.a. $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ es $2n + 3n^2$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Determine el término de la posición r .

(6) El p -ésimo término de una p.a. es q y el q -ésimo es p . Determine el m -ésimo término.

- (7) La suma S_p de los p primeros términos de una p.a. es igual a q y la suma de sus q primeros términos es p . Calcule la suma de sus $p + q$ términos.
- (8) La suma de los p primeros términos de una p.a. es igual a La suma de los q primeros términos con $p \neq q$. Demuestre que la suma de los $p + q$ primeros términos de la progresión es igual a cero.
- (9) Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}^+$ una p.a. con diferencia d . Demuestre que
- (i) $\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1$
 - (ii) $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}$
- (10) Determine el décimo término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión $G = \{-3, 3\sqrt{3}, -9, \dots\}$
- (11) Determine el décimo término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión $G = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\}$
- (12) El tercer término de una p.g. es $-\frac{2}{3}$ y el sexto, $\frac{2}{81}$. Determine el octavo término de la progresión.
- (13) El cuarto término de una p.g. es $-\frac{1}{2}$ y el sexto, $-\frac{1}{8}$. Determine la suma de los 10 primeros término de la progresión.
- (14) Considere la p.g. $G = \{3, 6, 12, \dots\}$. ¿Cuál debe ser la diferencia de una p.a. cuyo primer término es 3, y la suma de los 11 primeros términos de la p.g. sea igual a la suma de los 50 primeros términos de la p.a.?
- (15) Interpolar 5 medios geométricos entre $\sqrt{2}$ y $729\sqrt{2}$
- (16) Interpolar $n-1$ medios geométricos entre x y xy
- (17) El producto de tres números en p.g. es $\frac{125}{27}$ y la suma de los productos de esos números, dos a dos, es $\frac{65}{6}$. Determine la razón de la p.g.
- (18) La suma de tres números en p.g. es $\frac{14}{3}$. Si al primero se le resta 5 y al último se le resta $\frac{35}{3}$, se obtiene una p.a. Determine ambas progresiones.
- (19) Se quiere construir un muro de ladrillo en forma triangular, para ello cada fila debe contener 4 ladrillos menos que la fila inmediatamente anterior.
- Si en la primera corrida hay 585 ladrillos y en la última hay 1 ladrillo entonces determine la cantidad total de ladrillos que se necesitan para construir el muro.

- Si el total de ladrillos es 15.000, cual es el número máximo de corridas que pueden ser construidas.

(20) Una casa vale \$ 20.000.000. Determine el valor de la casa al cabo de 8

$$(b) \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-(k-1)} \binom{n}{k}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!n+1}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(n+1)}{(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(n+1)}{(n-k)!(n-k+1)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)}{n-(k-1)} \\ &= \binom{n}{k} \cdot \frac{(n+1)}{n-(k-1)} \end{aligned}$$

$$(c) \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k+1} \\ &= \binom{n}{k} \cdot \frac{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

$$(d) \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{1}{(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{n-k}{(k+1)(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} \\
&= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}
\end{aligned}$$

$$(e) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Teorema 5.2.1. *Teorema del Binomio*

Si $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $a + b \neq 0$ entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

En efecto

- p.d.q. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

- *Datos*

Como $n \in \mathbb{N}$ entonces la propiedad debe valer para los naturales y entonces estudiamos usando inducción la validez de la fórmula:

$$F(n): \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

– p.d.q. $F(1)$ es verdadera

Por una parte tenemos que

$$(a + b)^1 = (a + b) \text{ y por otra parte}$$

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$$

– *Hipótesis de inducción*

Supongamos que $F(n)$ es verdadera, es decir

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (H)$$

– *Tesis de inducción: p.d.q. $F(n+1)$ es verdadera*

En efecto

(1) Desarrollando $F(n+1)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n (a + b) \\ &\stackrel{(H)}{=} (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \quad (\star) \end{aligned}$$

(2) Aplicando la propiedad del reloj a la segunda parcela tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} &= \sum_{k=0+1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \end{aligned}$$

(3) Reemplazando en $(\star)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

– Así que $F(n+1)$ es verdadera.

• Luego,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

5.3. Ejercicios Resueltos del Teorema del Binomio.

(1) Considere el desarrollo binomial.

$$B = \left(x - \frac{1}{x^3} \right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Demuestre la siguiente afirmación.

Si existe un término digamos, que contiene a x^{-4m} entonces n debe ser un múltiplo de 4.

Solución

Etapas 1 : Salida

Sea t_{s+1} el término pedido.

Etapas 2 : Datos

(i) Si t_{s+1} es el término pedido entonces

$$\begin{aligned} t_{s+1} &= \binom{n}{s} x^{n-s} \left(\frac{-1}{x^3}\right)^s \\ &= \binom{n}{s} x^{n-s} \frac{(-1)^s}{x^{3s}} \\ &= \binom{n}{s} x^{n-4s} (-1)^s \end{aligned}$$

(ii) si x^{-4m} aparece en el término t_{s+1} entonces

$$\begin{aligned} x^{-4m} = x^{n-4s} &\implies -4m = n - 4s \\ &\implies 4s - 4m = n \\ &\implies 4(s - m) = n \end{aligned}$$

Conclusión : " n es un múltiplo de 4."

(2) Demuestre que si C es el coeficiente del término que contiene a x^a en el desarrollo binomial

$$\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{3n}$$

entonces

$$C = (-1)^{\frac{9n-a}{4}} \frac{(3n)!}{\left(\frac{9n-a}{4}\right)! \left(\frac{3n+a}{4}\right)!}$$

Solución

(i) Sea t_{k+1} el término que contiene a x^a entonces

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \binom{3n}{k} \cdot (x^3)^{3n-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k \\ &= (-1)^k \cdot \binom{3n}{k} \cdot \frac{x^{9n-3k}}{x^k} \\ &= (-1)^k \cdot \binom{3n}{k} \cdot x^{9n-4k} \end{aligned}$$

(ii) Sea,

$$(96) \quad C = (-1)^k \cdot \binom{3n}{k}$$

(iii) Ahora, x^a , aparece en el término t_{k+1} si y sólo si

$$\alpha = 9n - 4k$$

así que,

$$(97) \quad k = \frac{9n - a}{4}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de k , obtenido en (97) en (96) y operando tenemos:

$$\begin{aligned}
C &= (-1)^{\frac{9n-a}{4}} \cdot \binom{3n}{\frac{9n-a}{4}} \\
&= (-1)^{\frac{9n-a}{4}} \cdot \frac{(3n)!}{(3n-\frac{9n-a}{4})! \cdot (\frac{9n-a}{4})!} \\
&= (-1)^{\frac{9n-a}{4}} \cdot \frac{(3n)!}{(\frac{3n+a}{4})! \cdot (\frac{9n-a}{4})!}
\end{aligned}$$

(3) Aplicación

” Aceptaremos algunos resultados que serán demostrados más tarde ”.
Si desarrollamos el binomio $(1+x)^n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \\
&= \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \dots + \binom{n}{s-1} x^{s-1} + \dots + x^n \\
&= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-s+2)}{(s-1)!} x^{s-1} + \dots + x^n
\end{aligned}$$

El resultado que usaremos, puede ser intuitivamente descrito como sigue:

Si $|x| < 1$ y $n < 0$ entonces $(1+x)^n$ puede ser aproximado por un número finito de términos en la ecuación descrita encima.

Ejemplo 5.3.1.

Determinemos el valor aproximado de $(1,02)^{-4}$ con cuatro cifras significativas.

Solución

$$\begin{aligned}
(1,02)^{-4} &= (1+0.02)^{-4} \\
&= 1 + (-4)(0.02) + \frac{(-4)(-5)}{2!}(0.02)^2 + \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!}(0.02)^3 + \frac{(-4)(-5)(-6)(-7)}{4!}(0.02)^4 + \dots \\
&= 1 - 0.08 + 0.004 - 0.00016 + 0.0000056 + \dots \\
&= 0.9238456
\end{aligned}$$

5.4. Ejercicios Propuestos del Teorema del Binomio.

(1) Determine el séptimo término en el desarrollo binomial:

$$(2x - y)^{12}$$

- (2) Determine el noveno término en el desarrollo binomial:

$$\left(2 + \frac{x}{4}\right)^{15}$$

- (3) Determine el término que contiene
- $\frac{x^2}{y^2}$
- en el desarrollo binomial:

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{2x^2}\right)^8$$

- (4) Determine el decimocuarto término del desarrollo binomial:

$$\left(4x^2y - \frac{1}{2xy^2}\right)^{20}$$

- (5) si uno de los términos en el desarrollo binomial

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{60}$$

es de la forma $a \cdot x^{-54}$. Determine el valor de a .

- (6) Determine el término independiente de
- x
- (si existe) en los binomios:

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{30}$$

- (7) Demuestre que
- $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$

- (8) Determine los cuatro primeros términos de las siguientes expresiones:

(a) $\frac{1}{1+x}$

(b) $\sqrt{\quad}$